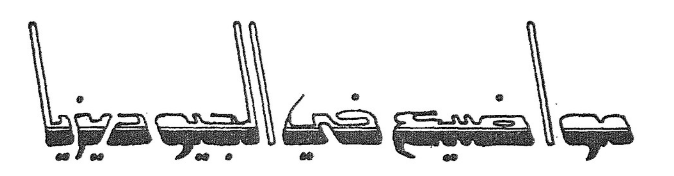
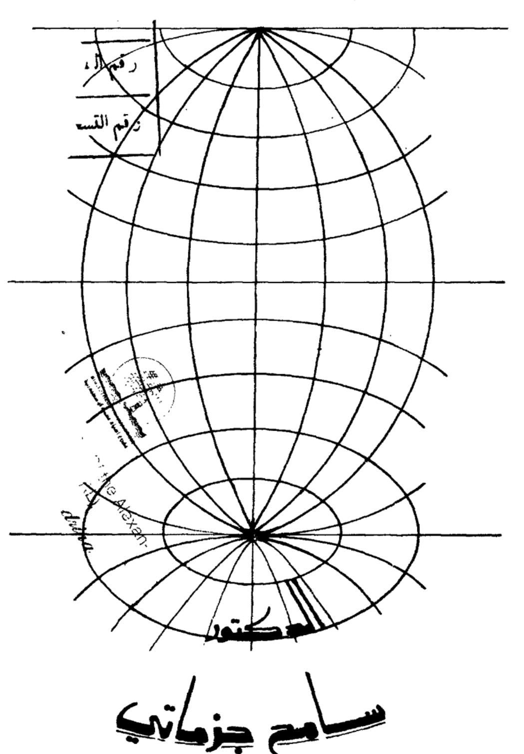


الدكتور
سامح جزماتي

مواضيع في الجيوديزيا



الدكتور

سامح جزماتي

— مقدمـــــــــة —

ان المعنى الحرفي لكلمة جيوديزيا هو تقسيم الارض ، وقد تطور هذا المفهوم فأصبح يشمل عددا كبيرا من المواضيع المتعلقة بالارض وشكلها وكثافتها وتغيرات قشرتها وتغيرات القوة الجاذبة ... الخ . وقد أخذ أهمية علمية كبيرة وخاصة في السنوات الاخيرة حينما استخدمت الاقمار الصناعية لربط مختلف نقاط القارات وتعيين مقدار تفلطح الارض وشكلها .

يمكننا تصنيف المواضيع التي تدخل ضمن نطاق علم الجيوديزيا الى قسمين اساسيين . القسم الاول يعالج المسائل التي تهم مباشرة المهندس المساح والتي من شأنها ان تعرف القواعد الاساسية التي يرتكز عليها علم المساحة . ونذكر من هذه المواضيع تأسيس وحساب الشبكات الجيوديزية وشبكات التسوية العامة للبلاد التي تشكل الهيكل الاساسي لاعمال المسح المستوى والارتفاعي . وكذلك طرق الارتسام لوضع الخرائط المساحية . ويبحث القسم الثاني في مواضيع علمية تتعلق بالارض كتعيين انحرافات الشاقول وتوزع الكثافة داخل الارض وعلى سطحها وتغيرات القشرة الارضية وتغيرات المستوى الوسطي للبحار .. الخ .

يتعرض المهندس في كلا القسمين الى قياسات يقوم بتعديلها وتقدير استنادا اليها مجاهيل لايمكن قياسها . ويتم ذلك وفق مبدأ دقيق معروف في علم الاحصاء والاحتمالات هو مبدأ المربعات الصغرى المشتق من مبدأ تقدير المجاهيل استنادا الى طريقة الاكثر تشابها أو طريقة التشابه الاعظمي (*maximum likelihood*) .

يقسم هذا الكتاب الى قسمين اساسيين :

١ — القسم الاول ونشرح فيه بشكل مبسط مواضيع من الجيوديزيا لابد للمهندس المدني الالمام بها . فبعد مدخل في الفصل الاول نعطي في الفصل الثاني مبادئ المثلثات الكروية واهم قوانينها ، ثم نشرح في الفصل الثالث بعض طرق الارتسام لوضع الخرائط المساحية . وبعدها نستعرض في الفصل الرابع والخامس وبشكل

موجز جدا الشبكات الجيوديزية وشبكات التسوية الهندسية الدقيقة ٠

٢ — القسم الثاني ، ونشرح فيه مبدأ المربعات الصغرى بطريقة حديثة وشخصية بالاعتماد على المصفوفات وفي اطار علمي منسجم مع علم الاحصاء والاحتمالات ، فلم نطلق في الفصل السادس كلمة تعديل القياسات كما هو معروف في الطرق الكلاسيكية في المساحة التي تعالج القياسات ، بل استخدمنا كلمة تقدير المجاهيل ، اذ لم نهتم بايجاد التصحيحات ومن ثم القيم النهائية بل فورا بينا طريقة لايجاد القيم المعدلة ٠

هذا وقد عرضنا المبدأ باستخدام نموذج رياضي عام استنتجنا منه كافة الحالات الخاصة ، وقد بينا في الفصل السابع تطبيقات لهذا المبدأ في ميادين الجيوديزيا والمساحة ٠

لقد اردت بهذا الكتاب ان اعرض بشكل مختصر وعلمي مايهم المهندس المدني من مواضيع الجيوديزيا وان اشرح مبدأ المربعات الصغرى في اطار حديث وضمن قالب يصلح للبرمجة الالكترونية بسهولة وخاصة اذا اعتمدنا على برامج جزئية جاهزة لضرب مصفوفات ، وقلب مصفوفة مربعة نظامية وضرب مصفوفة بشعاع ٠

آمل ان اكون قد حققت ماهدفت اليه ٠

حلب في ٢٦ شباط ١٩٨٠

المؤلف

الفصل الاول

شكل الارض

(1. 1) — علم الجيودیزیا وقياساته :

ان الجيوديزيا علم غايته دراسة شكل الارض من الوجهة الهندسية ، وهو يبحث في عدد من المواضيع نذكر منها :

١ — تعيين شكل وابعاد الارض .

٢ — وضع وحساب شبكات التثليث التي تشكل الهيكل الاساسي للاعمال المساحية المستوية .

٣ — طرق الارتسام على مستوى لجزء من الارض أو للارض بأكملها وذلك بغية انشاء الخرائط .

٤ — تأسيس وحساب شبكات التسوية العامة لتكون الهيكل الاساسي للارتفاعات في الاعمال المساحية .

٥ — قياس المسافات بالطرق الالكترونية .

٦ — تغيرات القشرة الارضية والمستوى الوسطي للبحار .

٧ — تغيرات القوة الجاذبة (الثقالة) .

٨ — شدة القوى المغناطيسية على سطح الارض .

٩ — الاستفادة من الاقمار الصناعية في دراسة شكل الارض .

١٠ — تعيين تغيرات السدود .

تعتمد هذه المواضيع على قياسات تجرى على سطح الارض ، ويمكننا تصنيف هذه القياسات كما يلي :

١ — قياسات فلكية ، وبواسطتها يتم تعيين الاحداثيات الفلكية

في نقطة من سطح الارض، وتعيين السمت الجغرافي لاتجاه ما •

٢ — قياسات للمسافات على سطح الارض وذلك في عمليات قياس القواعد وقياس المسافات في شبكة تثليث •

٣ — قياسات دقيقة للزوايا وذلك في عمليات التثليث •

٤ — قياسات التسوية الدقيقة والتي بواسطتها يمكن تعيين ارتفاعات دقيقة لنقاط من سطح الارض •

٥ — قياسات للثقالة •

ان كل هذه القياسات تجرى على سطح الارض وتعتمد على الشاقول (اتجاه الثقالة) ، فلكي نستطيع الاستفادة منها لاجراء الحسابات وحل الاشكال الهندسية ، علينا معرفة السطح الذى تتم عليه القياسات ، أو السطح الذى تسقط عليه هذه القياسات ان هذا السطح يعرف شكل الارض •

هذا ومن المواضيع والقياسات المذكورة اعلاه ماله علاقة وثيقة بالمساحة ومنها ماهو علمي بحت ، وسنقتصر في هذه الابحاث المختصرة على المواضيع التي تهم المهندس المدني والتي لابد منها لانجاز الاعمال المساحية بشكل متقن •

(1.2) — مختلف الفرضيات لشكل الارض :

منذ عهد فيثاغورس حتى القرن السابع عشر بعد الميلاد كان يعتبر ان للارض شكلا كرويا ، الا ان تقدم الميكانيك العقلي في بداية القرن السابع عشر ادى الى ادخال فرضية ادق لشكل

الارض بأن لها شكل الاهليلج الدوراني المفلطح باتجاه القطبين، وقد اعطى نيوتون المبدأ ين التاليين :

١ ـ ان الشكل المتوازن لكتلة مائعة متجانسة خاضعة لقوانين الجذب الكوني وتدور حول محور هو مجسم القطع الناقص الدوراني (الاهليلج الدوراني) المفلطح باتجاه القطبين •

٢ ـ ان الثقالة الارضية والتي هي محصلة القوة الجاذبة التي تمر من مركز الارض والقوة النابذة المولدة من دوران الارض حول محورها ، تزداد اعتبارا من خط الاستواء نحو القطبين •

وقد أيد كليرو (*Clairaut*) فرضية الاهليلج الدوراني اذ طرح فكرة سطح السوية • فسمي سطح سوية السطح العمودي في كل نقطة من نقاطه على اتجاه الشاقول أي اتجاه الثقالة •

نلاحظ من هذا التعريف انه لدينا عدد لانهائي من سطوح السوية وهي متساوية الكمون ، وهذا يعني علينا انه لرفع واحدة الثقل من سطح سوية N_1 الى سطح السوية N_2 (شكل 1.2.1) فان العمل ثابت في كل نقطة من السطح N_1 ولكن، حسب المبدأ الثاني لنيوتون تزداد الثقالة من خط الاستواء نحو القطبين ومن هنا نستنتج ان سطح السوية N_1 سيقترب من سطح السوية N_2 حين الاتجاه نحو القطبين وذلك لكي يبقى العمل ثابتا ،

(شكل 1.2.1)

أى اذا رمزنا بـ $g_1 , g_2 , ... g_i$ للثقالة في مختلف نقاط السطح N_1 وبـ $H_1, H_2, ... H_i$ للمسافات في هذه النقاط بين سطحي السوية N_1 و N_2 فاننا نستطيع ان نكتب :

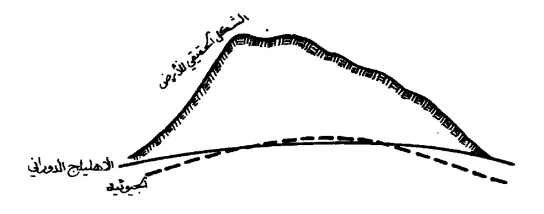
$$g_1 H_1 = g_2 H_2 = ... g_i H_i$$

الا ان القياسات التي تمت لتعيين شبكات التثليث سرعان ما بينت ان فرضية الاهليلج الدوراني كشكل للارض ليست الا تقريبية •

ان مبدأ نيوتون المذكور اعلاه لا يتحقق الا اذا كانت الكتل داخل الارض متجانسة تماما وهذا مغاير لحقيقة الارض حيث ان توزع الكتل فيها غير منتظم ، وهذا مايفسر وجود انحرافات في نقاط من سطح الارض أى عدم تطابق بين اتجاه الشاقول واتجاه الناظم على الاهليلج في هذه النقاط •

نستنتج من هنا ان القياسات التي تجرى على سطح الارض والمستندة على اتجاه الشاقول انما تمثل على سطح تعريفه تابع لاتجاه الثقالة أى تمثل على سطح سوية • وقد اتفق على اعتبار سطح السوية المار بالمستوى الوسطي للبحار (دون اعتبار ظاهرة المد والجزر) كسطح يمثل شكل الارض ، وسمي سطح السوية هذا بالجيوئيد (géoïde) •

ان الجيوئيد لا يطابق السطح الحقيقي للارض ، والكتل الكبيرة على سطح الارض ليس لها أى تأثير الا على شكل الجيوئيد لانها تشكل كتلا جاذبة للشاقول (شكل 1.2.2) •



(شكل 1.2.2)

(1.3) — سطوح المقارنة :

تتم القياسات على سطح الارض استنادا الى اتجاه الشاقول، ولهذا الاتجاه مدلول فيزيائي فهو اتجاه الثقالة في كل نقطة ، فلو كان الجيوئيد قابلا لتعريف رياضي لاستطعنا استغلال القياسات التي تتم على سطح الارض لحساب مسافات وزوايا على سطح الجيوئيد وبالتالي تمكنا من تعريف اوضاع نقاط من سطح الارض . لكن الجيوئيد سطح فيزيائي استندنا في تعريفه على اتجاه الثقالة في كل نقطة من سطح الارض، فهو غير معروف رياضيا أي لا يمكن وضع معادلة له كالسطوح الرياضية (مجسم القطع الناقص، الكرة ..) فللاستفادة من القياسات ولاجراء الحسابات نعوض الجيوئيد بسطح رياضي، هو الاهليج الدوراني الذى يعتبر اول تقريب للجيوئيد ، وهو سطح يقترب جدا من الجيوئيد والفرق بين السطحين لا يتعدى حدا اعظميا قدره عشرات الامتار . ان هذا التعويض لا تأثير له على المسافات المقاسة على سطح الارض، ولكنه يولد صعوبة في استغلال القياسات الزاوية (الزوايا الافقية) فهي تقاس على الطبيعة في

مستوى افقي أي عمودي على الشاقول لا في مستوى عمودي على الناظم للاهليلج ، هذا ونسمي الزاوية بين الشاقول والناظم بزاوية انحراف الشاقول وقيمة هذه الزاوية تتعلق بالكتل الموجودة على سطح الارض .

حينما نعوض الجيوئيد بالاهليلج الدوراني نقول عنه انه سطح للمقارنة ونعتبره التقريب الاول للجيوئيد ، وقد عين عدد كبير من الجيوديزيين ابعاد الاهليلج بقياسات فلكية وقياسات زاوية وطولية على سطح الارض ، لاندخل في تفاصيلها هنا ، ونكتفي بأن نعطي القيم التقريبية لانصاف محاور القطع الناقص المولد :

$$a = 6378388^{m}$$

$$b = 6356909^{m}$$

كما يمكن تعريفه بأحد انصاف محاوره وبالتفلطح :

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297}$$

ولأخذ فكرة عن الفرق بين a و b ومقدار تفلطح الاهليلج نقول اننا اذا مثلنا السطح بمقياس $\frac{1}{6400000}$ فاننا نحصل على فرق بين a و b قدره $3,^{mm}4$

يتبين لنا ان تفلطح الاهليلج صغير ، فيمكننا في عدد كبير من الحالات ان نعوض الاهليلج الدوراني بكرة نعتبرها سطحا للمقارنة . فالكرة كسطح للمقارنة هي تقريب ثان للجيوئيد . ان نصف القطر التقريبي للكرة هو 6400 km. فاذا مثلنا هذا السطح بمقياس $\frac{1}{6\,400\,000}$ فان نصف قطر الكرة يكون بهذا

المقياس يساوى مترا واحدا بينما لايتعدى اعلى الجبال على سطح الارض ارتفاع 1,"" 6 .

واخيرا فاذا كانت المنطقة من سطح الارض صغيرة فيمكننا تعويض الكرة في هذه المنطقة بمستوى افقي كما هو الحال في الاعمال المساحية . فالمستوى الافقي هو التقريب الثالث للجيوئيد .

ان اعتمادنا لاى سطح من سطوح المقارنة في منطقة يعود الى قبول فرضية توازى الشاقول والناظم على السطح في كل نقطة من المنطقة ، فحين اعتبار الكرة سطحا للمقارنة فاننا نقبل هنا ان الشواقيل تمر من مركز الكرة ، وحين اعتمدنا المستوى فهذا يعود الى قبول فرضية توازى الشواقيل . هذا وان قبولنا كسطح للمقارنة ، الاهليلج أو الكرة أو المستوى يعود بشكل عام الى اعتبارين :

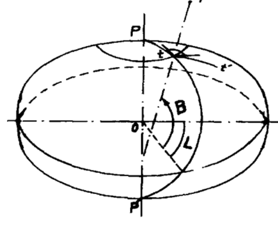
١ — مدى اتساع المنطقة التي تجرى فيها القياسات .

٢ — مدى الدقة في القياسات ، فمن الطبيعي انه يجب أن يكون الخطأ الناتج عن اعتماد تقريب دون الاخر اقل من الاخطاء التي تتم في القياسات ، فمثلا لايعطى لاعتماد الاهليلج الدوراني كسطح للمقارنة عندما يكون الفرق الناتج في الحسابات بينه وبين الكرة اقل من اخطاء القياسات .

ومما لا شك فيه اننا سنتمتع بميزة سهولة القوانين والاستنتاجات حينما نستطيع تعويض الاهليلج بالكرة أو الكرة بالمستوى .

(1.4) ــ الاحداثيات الجغرافية والاحداثيات الفلكية :

لنعتبر الاهليلج الدوراني ، ان المحور الصغير للاهليلج يقطع السطح في نقطتين P و P´
نسمي النقطة P بالقطب الشمالي للاهليلج ونسمي النقطة P´ بالقطب الجنوبي للاهليلج •



(شكل 1 . 4 . 1)

نطلق اسم مستوى الزوال على كل مستو يمر بخط القطبين P´ P (شكل 1 . 4 . 1) ، وهو يقطع السطح حسب قطع ناقص نسميه بخط الطول أو خط الزوال •

ان كل مستوى عمودي على خط القطبين يقطع الاهليلج الدوراني حسب دائرة صغيرة نسميها بالموازي ، وهي تسمى بخط الاستواء عندما يمر المستوى في مركز الاهليلج •

لنعتبر الان نقطة T من سطح الارض • ان مستوى زوال النقطة T هو المستوى المار بخط القطبين P P´ وبالنقطة T وهو يقطع الاهليلج حسب خط الزوال P´ Pt • ان الناظم على السطح المار من T هو ناظم على خط الزوال P´ Pt وهو يقطع السطح في النقطة t مسقط النقطة T •

نعرف اتجاه الشمال الجغرافي في النقطة t باتجاه

الشعاع المماس في النقطة t لخط الزوال والمتجه من t الى P •

يمكننا ان نعرف وضع أي نقطة t على الاهليلج بالاحداثيات الجغرافية للنقطة T ونرمز لها (حين اعتبار الاهليلج كسطح للمقارنة) بـ B و L ، حيث :

B :زاوية العرض للنقطة T وهي الزاوية التي يصنعها الناظم المار من T مع مستوى خط الاستواء وتقاس من $0°$ الى $+90°$ اعتبارا من مستوى خط الاستواء نحو القطب الشمالي •
ومن $0°$ الى $-90°$ اعتبارا من مستوى خط الاستواء نحو القطب الجنوبي ؛

L : زاوية الطول للنقطة T وهي الزاوية الثنائية بين مستوى زوال النقطة t ومستوى زوال ثان معتبر كمبدأ للقياس ، تعتبر L موجبة نحو الشرق •

لنعتبر المنحني $t\,t'$ المرسوم على الاهليلج (شكل 1.4.1) نسمي الزاوية التي يصنعها هذا المنحني مع خط الزوال المار من t بالسمت الجغرافي لـ $t\,t'$ ، وهي الزاوية بين المماسين للمنحنيين ، وتقاس اعتبارا من الشمال الجغرافي وبالاتجاه شمال ــ شرق ــ جنوب ــ غرب •

نلاحظ من التعاريف السابقة ان خط زوال ما على الاهليلج هو محل هندسي لنقاط لها نفس زاوية الطول ، فكل النقاط الواقعة على خط زوال تحقق العلاقة (ثابت = L) • وكذلك نلاحظ ان أي مواز على الاهليلج هو محل هندسي لنقاط لها نفس زاوية العرض فكل النقاط الواقعة على مواز تتمتع بالخاصة (ثابت = B) •

لنعرف الان الاحداثيات الفلكية والتي تقاس بطرق الفلك •
نسمي زاوية العرض الفلكية للنقطة T الزاوية B_a التـــي يصنعها الشاقول المار بالنقطة T مع مستوى عمودى على خـــط قطبي الارض (شكل 1.4.2) •

لتعريف زاوية الطول الفلكية نعرف اولا مستوى زوال النقطة T بأنه المستوى المار بشاقول النقطة T وبخط مواز لخط قطبي الارض، على هذا الاساس تكون زاوية الطول الفلكية L_a للنقطة T هي الزاوية الثنائية بين مستوى زوال النقطة T ومستوى زوال مبدئي للنقطة O (شكل 1.4.3) •

نلاحظ من تعريفنا للاحداثيات الفلكية انها مستقلة عـــن الفرضيات لشكل الارض، فلها قيمة مطلقة .

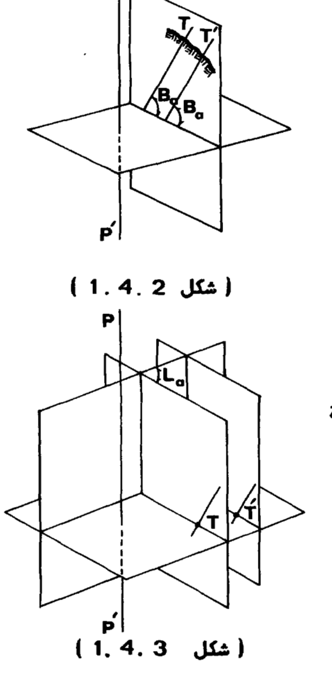
لنعتبر الان نقطتين T و ´T من سطح الارض قريبتين من بعضهما وواقعتين في نفس مستوى الزوال • فبسبب وجـــود انحرافات للشاقول ، قد يكون شاقول النقطة T موازيا لشاقـــول النقطة ´T وعندها تكون زاويتا العرض للنقطتين متساويتيـــــن (شكل 1.4.2) • وهذا يعني انه ليس من الضرورى بالنسبة لنقطتين لهما نفس زاوية العرض ان تكونا واقعتين في نفس المســتوى العمودى على خط القطبين •

وكذلك لنعتبر نقطتين T و ´T قريبتين من بعضهمـــا وواقعتين في نفس المستوى العمودى على خط القطبين فبوجـــود انحرافات في الشاقول قد يكون الشاقول المار من T موازيـــا للشاقول المار من ´T وعندها يكون للنقطتين T ، ´T نفـــس

زاوية الطول علما بانهما غير موجودتين في نفس مستوى الزوال (شكل 1.4.3) ٠

من هنا يتبين لنا انه يمكن لنقطتين قريبتين من بعضهما ان تكون لهما نفس الاحداثيات الفلكية ، ونستنتج اذن انه من المستحيل تعريف نقاط سطح الارض بالاعتماد على الاحداثيات الفلكية ، وبشكل خاص فلا يمكن لشبكة من النقاط معينة باحداثياتها الفلكية ان تفي باغراض المساحة اذ قد تتعدى انحرافات الشاقول مجال الاخطاء ٠

ومن هنا نستنتج انه علينا ان نعرف اوضاع نقاط سطح الارض باعتبار سطوح المقارنة الرياضية ٠



(شكل 1.4.2)

(شكل 1.4.3)

(1.5) ـ الخطوط المميزة على الاهليلج الدوراني :

أ ـ الخط الجيوديزى •

يعرف الخط الجيوديزى على سطح ما بالمنحني ذى المستوى الملاصق الناظمي على السطح في كل نقطة من نقاط المنحني ، ففي كل نقطة من نقاط الخط الجيوديزى يكون الناظم على السطح منطبقا مع الناظم على المنحني ، وباعتبار هذه الخاصة يبرهن ان الخط الجيوديزى هو أقصر مسافة بين نقطتين واقعتين على السطح •

ان الخطوط الجيوديزية على الاهليلج هي بشكل عام منحنيات يسارية ، ونلاحظ ان خطوط الزوال هي خطوط جيوديزية مستوية •

باهمال انحرافات الشاقول ، تمثل المسافات الافقية المقاسة على سطح الارض بخطوط جيوديزية على الاهليلج •

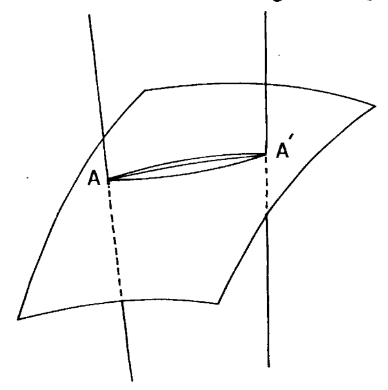
ب ـ المقطع الناظمي والمقطع الناظمي العكسي •

لنعتبر النقطتين A و A´ على الاهليلج الدوراني ان الناظمين في A و A´ لايتقاطعان الا اذا كانت النقطتان على نفس خط الزوال أو نفس الموازى ، فهما بشكل عام غير واقعين في مستو واحد •

نسمي تقاطع السطح مع المستوى المار من الناظم في A والنقطة A´ بالمقطع الناظمي في A (شكل 1 . 5 . 1)

ونسمي المقطع الناظمي العكسي في A تقاطع السطح مع المستوى المار من الناظم في A´ والنقطة A •

يبرهن أن الخط الجيوديزى المار من A و A´ يمــر مابين هذين المنحنيين •



(شكل 1 . 5 . 1)

ان الزاوية بين مقطعين ناظميتين مشتركتين في ناظم واحد هي الزاوية بين المماسين للمقطعين • ونلاحظ • باهمــــال انحرافات الشاقول • بأن للزاوية الثنائية (الافقية) المقاسة علــى سطح الارض تمثل كزاوية بين مقطعين ناظمين على الاهليلج •

تسمي الزاوية بين مقطع ناظمي وخط جيوديزى مار بــــن بنقطتين بزاوية الاختزال الى الخط الجيوديزى •

(1.6) ــ المسألتان الاساسيتان في الجيوديزيا :

لنعتبر على الاهليلج الدوراني النقطتين (A (B , L و (A´(B´, L´ • لنصل بينهما بخط جيوديزى ولنرمز بـ s

للمسافة الجيوديزية بين النقطتين و بـ α للسمت الجغرافي في النقطة A للخط الجيوديزى وبـ α' للسمت الجغرافي في النقطة A' لهذا الخط •

تتلخص المسألتان الاساسيتان في الجيوديزيا كما يلي :

المسألة الاولى :

اذا علمنا الاحداثيات الجغرافية (B , L) للنقطة A وطول الخط الجيوديزى s والسمت α في A ، فالمطلوب حساب الاحداثيات الجغرافية (B' , L') للنقطة A' والسمت α' في A' •

نلاحظ انه استنادا لهذه المسألة نستطيع اعتبارا من نقطة معلومة (B , L) A ان نحسب الاحداثيات الجغرافية A'(B', L') لنقطة A' فيما اذا اعطينا السمت من A الى A' للخط الجيوديزى المار بينهما ، واذا علمنا طول الخط الجيوديزى من A الى A' •

المسألة الثانية :

اذا علمنا الاحداثيات الجغرافية (B , L) و (B', L') لنقطتين A و A' فالمطلوب حساب s و α و α'

ان هذه المسألة تسمح لنا بحساب المسافات على الاهليلج وبالتالي على سطح الارض ، كما تعين لنا السموت الجغرافية للاتجاهات على سطح الارض •

ولنذكر انه لم يكن بالامكان حل هاتين المسألتين على

الاهليلج بسهولة مهما كان طول الخطوط الجيوديزية ، الا بعد تطور الالات الحاسبة الالكترونية •

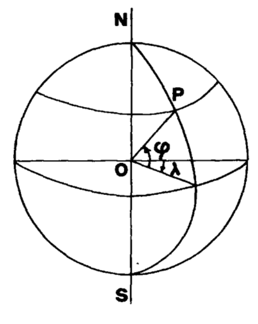
(1.7) — الكرة كسطح للمقارنة :

يمكننا ان نعوض بشكل عام الاهليلج بالكرة اذا كانت سعة المنطقة المعتبرة على سطح الارض صغيرة ،فنعتبر التقريب الثاني للجيوئيد • والكرة سطح رياضي اسهل من الاهليلج ، فالنواظم (الشواقيل) تمر كلها من مركز الكرة ، وينطبق الخط الجيوديزى والمقطع الناظمي والمقطع الناظمي العكسي على قوس دائرة عظمى على الكرة ، ان الزوايا الافقية المقاسة على الطبقة تمثل كزوايا بين اقواس دوائر عظمى على الكرة ، كما ان المسافات المقاسة على سطح الارض تسقط كأقواس دوائر عظمى ، نلاحظ هنا ايضا ان كل الخطوط الجيوديزية على الكرة هي مستوية ، وبذلك تسهل دراسة عدد من المواضيع في الجيوديزيا ، وكما سنرى في الفصل الثاني فاننا نستطيع حل المثلثات الكروية بتطبيق علاقات المثلثات الكروية ، ويسهل ايضا حل المسألة الاولى والثانية المذكورة في الفقرة السابقة •

حين تعويض الاهليلج الدوراني في منطقة بكرة نعتبر كرة ملاصقة للاهليلج نسميها بالكرة ذات الانحناء المتوسط ويحسب نصف قطرها بدلالة زاوية العرض لنقطة وسطية • هذا وفي عدد من الاحيان نعتبر نصف قطر الكرة $R = 6370$ km. وتكون هذه القيمة كافية لاجل عدد من المسائل •

ان خط قطبي الارض يقطع الكرة حسب نقطتين N و S

(شكل 1.7.1) . نسمي N بالقطب الشمالي و S بالقطب الجنوبي . وكما في الاهليلج . فكل مستو يمر بـ NS يسمى مستوى الزوال وتقاطعه مع الكرة هو دائرة عظمى فيها NS قطر .



(شكل 1.7.1)

ان تقاطع الكرة مع مستو عمودى على NS هو دائرة نسميها بالموازى . وهي تصبح دائرة عظمى اذا مر المستوى في مركز الكرة وتسمى عندئذ بخط الاستواء .

نعرف النقاط على الكرة باحداثياتها الجغرافية . فالنقطة P تعرف بزاوية العرض φ وزاوية الطول λ . ان زاوية العرض φ هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر OP (وهو الناظم على السطح) مع مستوى خط الاستواء وتقاس اعتبارا من خط الاستواء موجبة نحو القطب الشمالي N وسالبة نحو القطب الجنوبي S

أما زاوية الطول λ فهي الزاوية الثنائية بين مستوى زوال النقطة P ومستوى زوال مبدئي وتعتبر موجبة نحو الشرق وسالبة نحو الغرب .

نلاحظ ان خطوط الزوال والموازيات على الكرة تشكل جملة احداثيات منحنية متعامدة .

لنعتبر الكرة ذات نصف القطر R وعليها نقطة P احداثياتها (φ, λ) . لنرسم الموازى وخط الزوال المار من P ولنرمز بـ r

لنصف قطر هذا الموازى .

لتكن P_1 نقطة على نفس الموازى P كما لتكن P_2 نقطة على نفس خط الزوال لـ P . فاحداثيات P_1 هي (φ , λ') واحداثيات P_2 (φ' , λ) .

لنحسب طول القوسين PP_1 و PP_2 .

لدينا من الشكل (1.7.2):

$$PP_1 = r(\lambda - \lambda')$$

ولكن نلاحظ بسهولة انه لدينا :

$$r = R\cos\varphi \qquad (1.7.1)$$

فتصبح العلاقة السابقة :

$$PP_1 = R\cos\varphi\,(\lambda - \lambda') \qquad (1.7.2)$$

وكذلك نستنتج من الشكل (1.7.2):

$$PP_2 = R(\varphi - \varphi') \qquad (1.7.3)$$

(شكل 1.7.2)

لنعتبر الان تغييرا جزئيا لـ φ قدره $d\varphi$ فتنتقل النقطة P على خط الزوال انتقالا جزئيا ds_m يمكن حسابه بتفاضل العلاقة (1.7.3) بالنسبة لـ φ أو من الشكل (1.7.3) مباشرة

$$ds_m = R\,d \qquad (1.7.4)$$

وكذلك لنعتبر تغييرا جزئيا لـ λ قدره $d\lambda$ فتنتقل النقطة P

على الموازى انتقالا جزئيا ds_p يمكن حسابه بتفاضل العلاقة (1.7.2) بالنسبة لـ λ أو من الشكل (1.7.3) مباشرة :

$$ds_p = R\cos\varphi \, d\lambda \qquad (1.7.5)$$

ومن اجل تغيير φ بـ $d\varphi$ و $\lambda, d\lambda$ تصبح النقطة P بالوضع P´ وتكون قد انتقلت انتقالا جزئيـــا $PP' = ds$ يمكن حســابه من العلاقة التالية : (شكل 1.7.3)

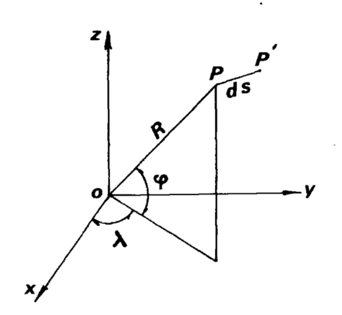
$$ds^2 = ds_m^2 + ds_p^2 \qquad (1.7.6)$$

وبادخال (1.7.4) و (1.7.5) في العلاقة (1.7.6) نجد :

$$ds^2 = R^2 \left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi \, d\lambda^2 \right) \qquad (1.7.7)$$

ويمكننا ان نبرهن على العلاقة (1.7.7) بطريقة ثانية . لنعتبر في مركز الكرة جملة الاحداثيات المتعامدة (o x y z) حيث (ox , oy) في مستوى خط الاستواء و (ox , oz) في مستوى الزوال المبدئي و oz متجه نحو القطب الشمالي N .

ان المعادلات الوسيطية للكرة في هذه الجملة هي (شـــكل 1.7.4)



(1 . 7 . 8)

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda$$
$$y = R\cos\varphi\sin\lambda$$
$$z = R\sin\varphi$$

(شكل 1.7.4)

باعتبار تغيرات لـ φ و λ قدرها $d\varphi$ و $d\lambda$
تعاني x , y , z تغيرات قدرها dx , dy , dz
تعطى من (1 . 7 . 8) بتفاضل هذه العلاقات :

$$dx = R(-\sin\varphi\cos\lambda\, d\varphi - \cos\varphi\sin\lambda\, d\lambda)$$
$$dy = R(-\sin\varphi\sin\lambda\, d\varphi + \cos\varphi\cos\lambda\, d\lambda) \qquad (1.7.9)$$
$$dz = R\cos\varphi\, d\varphi$$

وتنقل النقطة P الى نقطة P' ($ds = PP'$) ويعطى هذا
الانتقال بالعلاقة

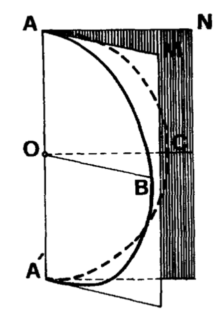
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1.7.10)$$

بادخال (1.7.9) في (1.7.10) نجد العلاقة (1.7.7) .

الفصل الثاني
المثلثات الكروية

(2.1) ـ الزاوية الكروية والمثلث الكروى :

لنعتبر الكرة ذات المركز O ونصف القطر R • ان كل مستو يمر من O يقطع الكرة حسب دائرة مركزها O ونصف قطرها R • لتكن A و B نقطتين على سطح الكرة غير متناظرتين بالنسبة للمركز (شكل 2.1.1) • ان المستوى المار من A و B و O يقطع الكرة حسب دائرة عظمى والنقطتان A و B تقسمان هذه الدائرة الى قوسين الاول اصغر من نصف محيط الدائرة والثاني اكبر من نصف محيطها • عندما نقول القوس A B من الدائرة العظمى نعني القوس الاصغر من نصف محيط الدائرة • ويسمى هذا القوس بالمسافة الكروية او بالمسافة الجيوديزية بين النقطتين • نلاحظ ان القوس A B له نفس قياس الزاوية المركزية A Ô B •



(شكل 2.1.1)

لنعتبر الان النقطة C من سطح الكرة والدائرة العظمى O A C •

لنرسم من A المماسين A M و A N للدائرتين A B و A C
نعرف الزاوية الكروية ذات الرأس A أى الزاوية $B\hat{A}C$ بالزاوية بين المماسين للدائرتين A B و A C . ونرى انها ايضا الزاوية الثنائية لمستوى الدائرتين •

يمكننا ان نصل ثلاثة نقاط واقعة على الكرة بثلاث دوائر عظمى على ان لا تكون واقعة مع مركز الكرة في مستو واحد •

ان الشكل الذى نحصل عليه يسمى بالمثلث الكروى (2.1.2)
لكل مثلث كروى ستة عناصر وهي أ) الاضلاع وهي الاقواس $c = \widehat{AB}$ $b = \widehat{AC}$ $a = \widehat{BC}$ ب) الزوايا الكروية في الرؤوس أى $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ •

اذا وصلنا رؤوس المثلث بمركز الكرة O (شكل 2.1.2) نحصل على ثلاثية O A B C نسميها بالثلاثية المركزية للمثلث الكروى • نلاحظ ان الزاوية $B\hat{O}C$ لها نفس قياس القوس a ، وكذلك بالنسبة للزاويتين $A\hat{O}C$ و $A\hat{O}B$ اللتين لهما نفس قياس القوسين b و c • كما نلاحظ ان الزاوية الثنائية لوجهين من اوجه الثلاثية هي زاوية كروية ، ومن هنا نستنتج ان عناصر المثلث الكروى هي نفس عناصر الثلاثية المركزية •

(شكل 2.1.2)

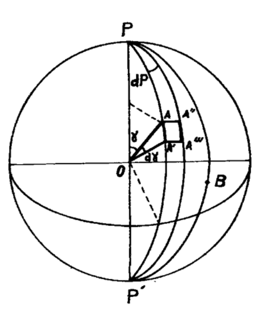
اذا قطعنا الثلاثية المركزية بكرات مركزها O وذات انصاف اقطار متغيرة حصلنا على مثلثات كروية اضلاعها المتقابلة لها نفس

القياس الزاوى وزواياها الكروية المتقابلة متساوية ، فباعتبار قياس زاوى للاضلاع تكون هذه المثلثات كلها متساوية • ومن هنا نستنتج اننا نستطيع ان نعتبر نصف قطر الكرة التي رسم عليها مثلث كروى يساوى للواحد وان نستنتج العلاقات بين عناصر المثلث الكروى •

(2.2) — سطح قطعة الكرة :

لنعتبر الكرة ذات المركز O ونصف القطر R ولتكن PAP' و PBP' دائرتين اعظميتين محددتين لقطعة كرة ذات زاوية كروية P و A نقطة ما على الدائرة العظمى PAP' • لنرمز بـ γ للزاوية التي يصنعها القطر PP' مع نصف القطر OA •

لنعط تغييرا لـ γ قدره γ فنحصل على النقطة A' وتغييرا للزاوية الكروية P قدره dP فنحصل على الدائرة العظمى $PA''P'$ • ان المستويين العمودين على القطر PP' والمار احدهما في A والثاني في A' يقطعان الدائرة العظمى $PA''P'$ في النقطتين A'' و A''' (شكل 2. 2. 1)



ان مساحة السطح الجزئي $AA'A''A'''$ تساوى :

$$dS = AA' \times AA'' \qquad (2.2.1)$$

(شكل 2 . 2 . 1)

ولدينا : $AA' = R\,d\gamma$

$AA'' = r\,dP = R\sin\gamma \,.\, dP$ حيث r هو نصف قطر الدائرة الصغرى AA'' فتصبح العلاقة (2.2.1) :

$$dS = R^2 \sin\gamma \; d\gamma \; dP$$

وتكون مساحة قطعة الكرة ذى الزاوية الكروية P :

$$S = R^2 \int_0^P dP \int_0^\pi \sin\gamma \, d\gamma = PR^2 \Big[-\cos\gamma \Big]_0^\pi$$

ومنه

$$\boxed{S = 2PR^2} \qquad (2.2.2)$$

نستنتج اذن ان سطح قطعة كرة متناسب طردا مع قيمة الزاوية الكروية لهذه القطعة •

<u>ملاحظة</u> : اذا اعتبرنا $P = 2\pi$ في العلاقة (2.2.2) نحصل على سطح الكرة :

$$\Sigma = 4\pi R^2 \qquad (2.2.3)$$

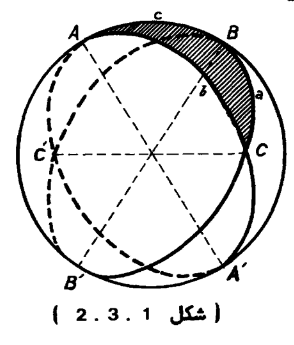
(2.3) ــ <u>الزيادة الكروية في المثلث الكروى</u> :

ليكن لدينا المثلث الكروى ABC ان مساحات القطع الكروية ذات الرؤوس A ، B ، C تساوى على الترتيب : $2AR^2$ ، $2BR^2$ ، $2CR^2$ حيث A ، B ، C هي الزوايا الكروية في رؤوس المثلث ABC (شكل 2.3.1)

اذا جمعنا مساحات هذه القطع استنتجنا نصف سطح الكرة مطروحا منها سطحي المثلثين ABC و $A'B'C'$ للرمز بـ T و T' لسطحي هذين المثلثين فيمكننا ان نكتب

$$2AR^2 + 2BR^2 + 2CR^2 - T - T' = 2\pi R^2$$

لكن عناصر المثلث $A'B'C'$ ماهي الا عناصر المثلث ABC فالمثلثان متساويان ، أى لدينا $T = T'$ وتصبح العلاقة السابقة :



(شكل 2 . 3 . 1)

$$2AR^2+2BR^2+2CR^2-2T=2\pi R^2$$

ومنه

$$A+B+C=\pi+\frac{T}{R^2} \qquad (2.3.1)$$

أى ان مجموع زوايا المثلث الكروى اكبر دوما من π ونسمي الكمية

$$\boxed{\varepsilon = \frac{T}{R^2}} \qquad (2.3.2)$$

بالزيادة الكروية ، وتكون قيمتها بالثواني المئوية :

$$\boxed{\varepsilon^{cc} = \rho^{cc}\frac{T}{R^2}} \qquad (2.3.3)$$

فاذا علمنا سطح المثلث الكروى استطعنا حساب الزيادة الكروية ، واذا كانت الزيادة ε معلومة فالعلاقة (2 . 3 . 2) تعطينا مساحه لمثلث الكروى ، هذا وباعتبار ان ε^{cc} هي صغيرة بشكل عام (R^2 في المخرج) فاننا اذا اعتبرنا قيمة تقريبية لمساحة المثلث T فلا تتأثر عليا قيمة ε^{cc} فيمكننا اذن حساب T كما

لو كان المثلث مستويا ، ومن ثم تعطينا العلاقة (2.3.3) قيمة الزيادة الكروية .

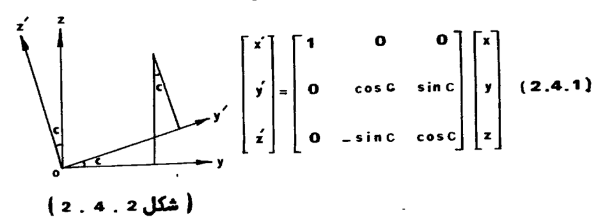
(2.4) ـ العلاقات الاساسية في المثلث الكروى :

لتكن الكرة ذات المركز O ونصف القطر المساوى للواحد ($R = 1$) وليكن ABC مثلثا كرويا مرسوما عليها . سنعتبر هنا القياس الزاوى لاضلاع المثلث . لندخل جملة الاحداثيات المتعامدة ($oxyz$) ، ذات المبدأ ، مركز الكرة o ، وبشكل يكون معه المحور oz منطبقا مع نصف القطر oA والمحور oy في مستوى الدائرة العظمى AB ومتجها في نفس ربع الكرة الموجودة فيه النقطة C ، أما المحور ox فموجه بشكل تصبح فيه الجملة ($oxyz$) جملة مباشرة .

لنطبق على هذه الجملة دورانا حول المحور ox سعته الزاوية c فنحصل على الجملة ($ox'y'z'$) حيث oz' يصبح منطبقا مع نصف القطر oB ويصبح oy في الوضع oy' صانعا زاوية c مع oy ، ويبقى في مستوى الدائرة العظمى AB ، أما المحور ox' فهو منطبق مع المحور ox .

(شكل 2.4.1)

ان قوانين التحويل من الجملة (o x y z) الى الجملة (o x′y′z′)
تعطى (شكل 2 . 4 . 2) بالعلاقة المتريسية التالية :



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

(شكل 2 . 4 . 2)

لنرمز بـ (x_c , y_c , z_c) لاحداثيات النقطة c في الجملة القديمة
وبـ (x'_c , y'_c , z'_c) لاحداثياتها في الجملة الجديدة • فيمكننا
ان نكتب حسب (2.4.1) :

$$\begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

ولكن لدينا من الشكل (2.4.1) :

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin b \, \cos(A-\frac{\pi}{2}) \\ \sin b \, \sin(A-\frac{\pi}{2}) \\ \cos b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin b \, \sin A \\ -\sin b \, \cos A \\ \cos b \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin a \, \sin B \\ \sin a \, \cos B \\ \cos a \end{bmatrix}$$

ومنه تصبح (2.4.2) :

$$\begin{bmatrix} \sin a \, \sin B \\ \sin a \, \cos B \\ \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin b \, \cos A \\ -\sin b \, \cos A \\ \cos b \end{bmatrix}$$

ومنه بضرب المصفوفة بالعمود في الطرف الثاني من هذه المعادلة نجد

$$\begin{bmatrix} \sin a \ \sin B \\ \sin a \ \cos B \\ \cos a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin b \ \sin A \\ -\cos c \ \sin b \ \cos A + \sin c \ \cos b \\ \sin b \ \sin c \ \cos A + \cos b \end{bmatrix}$$

أى

$$\sin a \ \sin B = \sin b \ \sin A \qquad (2.4.3)$$

$$\sin a \ \cos B = \cos b \ \sin c - \sin b \ \cos c \ \cos A \qquad (2.4.4)$$

$$\cos a = \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A \qquad (2.4.5)$$

ويمكننا كتابة العلاقة (2.4.3) على الشكل :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \cdot$$

وبتطبيق تبادل دائرى للرؤوس نستنتج

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad (2.4.6)$$

تسمي هاتين العلاقتين بعلاقتي الجيوب في المثلث الكروى •

أما العلاقة (2 . 4 . 4) فتسمى بعلاقة الجيب ـ تجيب وهي تربط بين خمسة عناصر من المثلث الكروى • وبتطبيق تبادل دائرى يمكننا كتابة علاقات اخرى شبيهة فيها •

أما العلاقة (2 . 4 . 5) فيمكننا ان نكتب استنادا اليها وبتطبيق تبادل دائرى للرؤوس :

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A \\ \cos b &= \cos a \ \cos c + \sin a \ \sin c \ \cos B \\ \cos c &= \cos a \ \cos b + \sin a \ \sin b \ \cos C \end{aligned} \qquad (2.4.7)$$

تسمى هذه العلاقات بعلاقات التجيب وهي مستقلة بعضها عن الاخر لان كل معادلة منها تحوى زاوية مغايرة ولا يمكن بالتالي استنتاج علاقة من العلاقتين الباقيتين ، فهي تؤلف مجموعة اساسية تسمى بالعلاقات الاساسية في المثلث الكروى ، فكافة علاقات المثلث الكروى يمكن استنتاجها اعتبارا من هذه العلاقات (2 . 4 . 7) وبالاستعانة بعلم المثلثات ، ولا يمكننا ايجاد اكثر من ثلاث علاقات مستقلة تربط عناصر المثلث الكروى ، اذ انه بافتراض وجود علاقة رابعة مستقلة نستطيع عندئذ حل المثلث أى ايجاد عناصره فيما اذا علمنا عنصرين منه وهذا مستحيل .

يمكننا ان نستنتج علاقات اخرى للمثلث الكروى باستخدام هذه العلاقات وعلم المثلثات .

نقول عن مثلث كروى A B C انه قائم اذا كانت احدى زواياه قائمة او احد اضلاعه قائما (مثلا $a = \frac{\pi}{2}$) ويمكننا ايجاد علاقات المثلثات الكروية القائمة كحالة خاصة من العلاقات التي وجدناها اعلاه .

تفيد علاقات المثلثات الكروية في عدد من مجالات الجيوديزيا فهي تستخدم في علم الفلك وفي البحرية والطيران وفي حل مثلثات شبكات التثليث وفي الارتسامات ...

تطبيق : لدينا نقطتان A و B على الكرة ذات نصف القطر R .

أ – نعطي الاحداثيات الجغرافية للنقطة A ولتكن (φ , λ) وطول قوس الدائرة العظمى بين A و B وليكن s وسمت القوس A B من A الى B وليكن α ، والمطلوب ايجاد

الاحداثيات الجغرافية (φ', λ') للنقطة B والسمت من B الى A (المسألة الاساسية الاولى) باعتبار سطح المقارنة الكرة)

ب ـ تعطي الاحداثيات الجغرافية للنقطتين A و B ولتكن (φ , λ) و (φ', λ') والمطلوب ايجاد أقصر مسافة بين A و B والسمت من A الى B والسمت العكسي من B الى A • (المسألة الاساسية الثانية باعتبار سطح المقارنة الكرة) •

الفصل الثالث

التمثيل المستوى

(3.1) — تعريف التمثيل المستوى :

لقد ادخلنا في الفصل الاول سطوحا رياضية للمقارنة لتمثيل نقاط سطح الارض، الا ان التمثيل النهائي لمنطقة من سطح الارض يجب ان يتم على مستو ، فعلينا نشر هذه السطوح للحصول على هذا التمثيل ، لكننا نعلم ان الاهليلج والكرة سطحان غير قابلين للنشر دون تمزق ، أي انه بنتيجة التمثيل المستوى ستعاني الاشكال المرسومة على هذين السطحين تغيرات ، ونحصل بشكل عام بنتيجة التمثيل المستوى للاهليلج أو الكرة على تغيرات في الاطوال والزوايا والمساحات .

ان نظريات الارتسام تبحث في كيفية نشر الاهليلج أو الكرة أو جزء من هذين السطحين ، وهي تعرف طرق التمثيل المستوى وتحدد قوانين التغيرات الخطية والزاوية لكل طريقة .

نعرف كل طريقة للارتسام أو للتمثيل المستوى بتوافق نقطي بين نقاط الاهليلج أو الكرة ونقاط المستوى .

لقد عرفنا نقاط الاهليلج أو الكرة باحداثياتها الجغرافية فاذا اخترنا في مستوى التمثيل احداثيات متعامدة (x , y) فنستطيع ان نعرف التوافق النقطي وبالتالي الارتسام تحليليا بقوانين نسميها بقوانين التحويل :

$$x = f(\varphi , \lambda)$$
$$y = g(\varphi , \lambda) \qquad (3.1.1)$$

(أو بدلالة B و L بالنسبة للاهليلج)
يجب ان تخضع القوانين (3.1.1) لشرط وحيد هو انه لقيمة (φ , λ) يجب ان توافقها قيمة وحيدة (x , y) • ان مجرد اختيار التوابع f و g تتعرف لدينا طريقة للارتسام • ان هذا التعريف هو تحليلي وعام ، يتبين لنا انه لدينا عدد لانهائي من طرق التمثيل ومن بعض هذه الطرق ما يقبل بالاضافة للتعريف التحليلي السابق (3.1.1) تعريفا هندسيا كالارتسامات المنظورية مثلا •

نعرف المرتسم لمنحن مرسوم على السطح بالخط المؤلف من النقاط في المستوى كمرتسمات لنقاط المنحني المرسوم على السطح • ان هذا المترتسم يكون منحنيا بشكل عام في المستوى •

لقد سبق ان ذكرنا ان الزاوية α بين منحنيين AB و AC مرسومين على سطح هي الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين في A • فاذا طبقنا طريقة للارتسام نحصل في المستوى على المنحنيين ab و ac مرتسمي المنحنيين AB و AC (شكل 3.1.1)

ان مرتسم الزاوية α هي الزاوية α' في المستوى بين المماسين للمنحنيين المستويين ab و ac تغاير بشكل عام الزاوية α مرتسمها α' وهنا نتساءل هل يمكن اخضاع التوابع f , g لشروط بشكل تتم (3.1.1)

(شكل 3.1.1)

فيه المحافظة على الزوايا في كل نقاط المنطقة المطلوب تمثيلها على المستوى .

يبرهن انه يمكن ايجاد عدد لانهائي من الارتسامات التي تتمتع بهذه الخاصة أى التي تؤمن ($\alpha = \alpha'$) في كل نقاط المنطقة الممثلة .

نسمي هذه الانواع من الارتسامات بالارتسامات المطابقة .
ويمكننا اختيار التوابع f و g بشكل تتم فيه المحافظة على المساحات وتسمى عندئذ الارتسامات بالمتساوية .

ويبرهن انه لايمكن ايجاد طريقة للارتسام يحافظ فيها على الزوايا والمساحات معا .

بما ان الاهليلج أو الكرة سطحان لايمكن تطبيقها على المستوى فلا توجد طرق للارتسام يحافظ فيها على الاطوال ولكننا نستطيع ايجاد طرق يحافظ فيها على الاطوال حسب خطوط معينة على السطح كالموازيات وخطوط الزوال أو خطوط اخرى .

ان اتباع طريقة للارتسام دون اخرى لوضع خريطة لقسم من سطح الارض يتعلق بالغاية المطلوبة من الخريطة وباتساع المنطقة وشكلها واتجاهها العام على الاهليلج .

سنقتصر في هذا الفصل على عدد من طرق الارتسام الاكثر استعمالا وخاصة طرق الارتسام المطابق وسنعتبر الكرة كسطح للمقارنة . ان هذا الاعتبار تقريبي وغير كاف اذا كانت المنطقة المراد تمثيلها كبيرة . ان طرق الارتسام تبقى نفسها ولكن قوانين التحويل تتعقد مع اعتبار الاهليلج الدوراني وهي تخرج عن هذا المنهاج .

(3.2) — نظرية تيسو (Tissot) ومبادئ نظريات الارتسام :

تستند نظريات الارتسام على نظرية تيسو التي سنعرضها دون برهان وهي عامة بالنسبة لارتسام سطح على سطح آخر :

١ — في كل ارتسام نقطي لسطح على سطح آخر يوجد في كل نقطة اتجاهان متعامدان يرتسمان حسب اتجاهين متعامدين .

٢ — في كل ارتسام نقطي لسطح على سطح آخر ترتسم دائرة لا متناهية في الصغر مرسومة على السطح الاول كقطع ناقص لا متناه في الصغر على السطح الثاني .

لنعتبر في نقطة ما P من سطح عنصرا خطيا لا متناهيا في الصغر ds ، ولنطبق طريقة ارتسام لهذا السطح على سطح آخر ان العنصر الخطي ds سيرتسم حسب ds´ . نعرف نسبة التغير الطولي المقدار :

$$m = \frac{ds'}{ds} \qquad (3.2.1)$$

فباعتبار الشطر الثاني من نظرية تيسو نرى ان نسبة التغير الطولي في نقطة ما تكون تابعة لاتجاه العنصر ds على السطح ، وتصبح اعظمية واصغرية حسب اتجاهين متعامدين يرتسمان حسب محاور القطع الناقص ، ونستخلص من هنا ان نسبة التغير الطولي تتعلق بشكل عام بعاملين :

١ — وضعية النقطة P على السطح .

٢ — اتجاه العنصر ds

يبرهن في طرق الارتسام المطابق التي يحافظ فيها على الزوايا

ان مرتسم القطع الناقص اللامتناهي في الصغر هو دائرة ، فيتحول هذا القطع الناقص الى دائرة • ومن هنا نستنتج ان نسبة التغير الطولي في طرق الارتسام المطابق لا تتعلق باتجاه العنصر ds بل تبقى ثابتة وتابعة فقط لوضعية النقطة على السطح ، هاتان الخاصتان مميزتان للارتسام المطابق •

تحافظ بعض طرق الارتسام على الاطوال حسب منحنيات • فحسب هذه المنحنيات تكون نسبة التغير الطولي $m = 1$ وفي بعض طرق الارتسام يشترط ان تكون $m = 1$ في نقطة وسطية من المنطقة المراد تمثيلها •• ليكن AB و AC منحنيين مرسومين على السطح في النقطة A • هذان المنحنيان يرتسمان حسب منحنيين ab و ac (شكل 3.2.1) •

ان الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين تساوى الزاوية A على السطح اذا كان الارتسام مطابقا • لنرسم الوترين ab و ac ان الزاويتين δ_1 و δ_2 بين المماسين والوترين تسميان بالتصحيحات الزاوية ، ونستطيع (شكل 3.2.1) بمعرفتها الانتقال من زاوية على السطح الى زاوية في المستوى بين الاوتار •

ان نظرية تيسو عامة فنتائجها صحيحة بالنسبة لارتسام الاهليلج أو الكرة على المستوى •

(3.3) ـ ارتسام الخرائط المسطحة المربعة :

يعرف هذا الارتسام بالقوانين التالية :

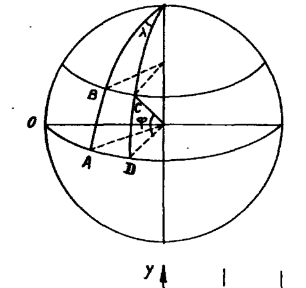
$$\begin{aligned} x &= R\,\lambda \\ y &= R\,\varphi \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

حيث R هو نصف قطر الكرة •

ان معادلة مواز ما على الكرة هي (ثابت = φ) وتعطينا (3.3.1) في هذه الحالة (ثابت = y) أى ان الموازيات تمثل بمستقيمات موازية للمحور o x ومن اجل (φ = 0) (خط الاستواء) نحصل على (y = 0) أى ان المحور o x يمثل خط الاستواء (شكل 3.3.1)

أما معادلة خط زوال ما على الكرة فهي (ثابت = λ) وتعطينا (3.3.1) في هذه الحالة (ثابت = x) أى ان خطوط الزوال تمثل بمستقيمات موازية للمحور o y ومن اجل λ = 0 (معادلة خط الزوال المبدئي) نحصل على (x = 0) أى ان المحور o y يمثل خط الزوال المبدئي •

ان طول قوس من خط زوال ما محصور بين خط الاستواء ومواز (ثابت = φ_B) كالقوس A B يعطى بالعلاقة :



(شكل 3.1.1)

$$AB = R\,\varphi_B \qquad (3.3.2)$$

ويمثل هذا القوس في المستوى حسب مواز للمحور o y اعتبارا من المحور o x بطول ($y_b = R\varphi_B$) وذلك حسب العلاقة الثانية من (3.1.1) • من هنا نستنتج انه في طريقة الارتسام هذه • محافظة على الاطوال حسب خطوط الزوال •

لنعتبر على مواز ما (ثابت = φ_B) قوسا A C محصورا بين خطي زوال (ثابت = λ_B) و (ثابت = λ_C) •

فاستنادا الى (1.7.2) يمكننا ان نكتب :

$$BC = R\cos\varphi_B(\lambda_C - \lambda_B) \qquad (3.3.3)$$

لتكن b و c النقطتين في مستوى الارتسام الممثلتين ل B و C والواقعتين على مواز للمحور o •

ان الطول bc يعطى بالعلاقة :

$$bc = x_c - x_b = R(\lambda_C - \lambda_B) \qquad (3.3.4)$$

وذلك استنادا الى قوانين التحويل (3.3.1)

بمقارنة العلاقتين (3.3.3) و (3.3.4) نجد ان طريقة الارتسام هذه تعطينا تغيرات في الاطوال حسب الموازيات وان الطول bc الممثل للطول BC يساوي للطول A D على خط الاستواء مهما كان وضع الموازي (ثابت = φ) وان هذا التغير يصبح لانهائيا في نقطة القطب •

لنعتبر على الكرة في نقطة (φ, λ) عنصرا خطيا لا متناهيا في الصغر ds • يرتسم هذا العنصر بطريقة الارتسام هذه • حسب العنصر ds' • ولدينا :

$$\boxed{ds^2 = R^2\left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2\right)} \qquad (1.7.7)$$

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (3.3.5)$$

ولكن لدينا من (3.3.1) :

$$dx = R\,d\lambda$$
$$dy = R\,d\varphi \qquad (3.3.6)$$

ومنه تصبح العلاقة (3.3.5) بادخال (3.3.6)

$$ds'^2 = R^2\left(d\lambda^2 + d\varphi^2\right) \qquad (3.3.7)$$

وتكون نسبة التغير الطولي

$$\boxed{m^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{d\varphi^2 + d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2}} \qquad (3.3.8)$$

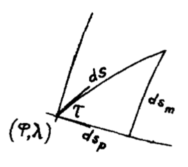
اذا كان العنصر ds محمولا على خط الزوال فعندها لدينا (λ = ثابت) أى $d\lambda = 0$ وتعطينا العلاقة السابقة نسبة التغير الطولي حسب خطوط الزوال ونجد $m_m = 1$ أى أن خطوط الزوال ترتسم بدون تغير في الاطوال • واذا كان العنصر ds محمولا على الموازى فلدينا (φ = ثابت) أى $d\varphi = 0$ ونجد من العلاقة (3 . 3 . 8)

$$\boxed{m_p = \frac{1}{\cos\varphi}} \qquad (3.3.9)$$

فالتغير الطولي بالنسبة للموازيات يزداد كلما ابتعدنا عن خط الاستواء •

ان الزوايا بين خطوط الزوال والموازيات على الكرة هي قائمة وترتسم في طريقة الارتسام هذه • كزوايا قائمة • لكن هذه • الخاصة لا تعني ان الارتسام مطابق • بالحقيقة لنعتبر في النقطة (λ , φ) على الكرة العنصر الخطي ds • ولتكن τ الزاوية التي يصنعها هذا العنصر مع الموازى المار من (λ , φ) (شكل 3 . 3 . 2) بتحليل العنصر ds الى عنصرين الاول ds_p محمول على الموازى

والثاني ds_m محمول على خط الزوال يمكننا ان نكتب

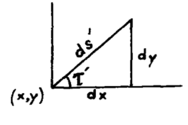


$$tg\,\tau = \frac{ds_m}{ds_p} \qquad (3.3.10)$$

ولكن لدينا :

$$ds_m = R\,d\varphi \qquad (1.7.4)$$
$$ds_p = R\cos\varphi\,d\lambda \qquad (1.7.5)$$

وعليه تصبح العلاقة (3.3.10)



$$tg\,\tau = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\,d\lambda} \qquad (3.3.11)$$

(شكل 3.3.2)

ان العنصر ds يرتسم في المستوى حسب ds صانعا زاوية τ مع مرتسم الموازي أي مع الموازي للمحور ox فيمكننا ان نكتب :

$$tg\,\tau' = \frac{dy}{dx} \qquad (3.3.12)$$

او بادخال قيم dx و dy حسب (3.3.6) :

$$tg\,\tau' = \frac{d\varphi}{d\lambda} \qquad (3.3.13)$$

ومن العلاقتين (3.3.11) و (3.3.12) نجد

$$tg\,\tau' = tg\,\tau \cdot \cos\varphi \qquad (3.3.14)$$

نستنتج من هنا انه من اجل $\varphi = 0$ (خط الاستواء) لدينا $\tau' = \tau$
أما بشكل عام : ($\tau \neq \tau$).لنبرهن الان في هذا الارتسام ، على الشطر الثاني من نظرية تيسو (*Tissot*) .

من العلاقات (1.7.4) و (1.7.5) و (3.3.6) يمكننا ان نكتب :

$$dy = ds_m \quad , \qquad \cos\varphi\, dx = ds_p$$

ومنه :

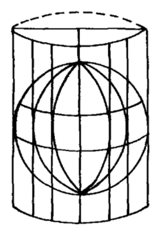
$$dy^2 + \cos^2\varphi\, dx^2 = ds_m^2 + ds_p^2 = ds^2$$

أو

$$\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dx^2}{\frac{ds^2}{\cos^2\varphi}} = 1 \qquad (3.3.15)$$

فاذا اعتبرنا (ds = ثابت) نحصل على الكرة على دائرة مركزها النقطة (φ, λ) • والمعادلة (3.3.15) تعطينا معادلة المرتسم وهي قطع ناقص •

يقبل هذا الارتسام تعريفا هندسيا اذ نحصل عليه (شكل 3.3.3) باعتبار اسطوانة مماسة على طول خط الاستواء وتمثل خطوط الزوال بمولدات على الاسطوانة وتمثل الموازيات على الكرة بموازيات للاسطوانة لها نفس تباعد موازيات الكرة • بنشر الاسطوانة نحصل على طريقة التمثيل المستوى المعرفة اعلاه •



(شكل 3.3.3)

لا يستعمل في الوقت الحاضر هذا الارتسام اذ لا ميزة له ويستعاض عنه بارتسام ميركاتور •

(3.4) ـ ارتسام ميركاتور (MERCATOR)

ان ارتسام ميركاتور مطابق ، أي يحافظ فيه على الزوايا ، وهو ارتسام اسطواني يقبل تعريفا هندسيا فباعتبار اسطوانة مماسة على طول خط الاستواء تمثل خطوط الزوال بمولدات الاسطوانة كما في حالة الارتسام السابق • وتمثل الموازيات بموازيات على الاسطوانة بحسب تباعدها بطريقة نحصل معها على ارتسام مطابق أي ان قوانين التحويل في ارتسام ميركاتور :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R\lambda \\ y &= R f(\varphi) \end{aligned}} \qquad (3.4.1)$$

حيث $f(\varphi)$ تابع لزاوية العرض φ سنعين هذا التابع بشكل نحصل فيه على ارتسام مطابق •

لقد وجدنا

$$\boxed{tg\,\tau = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\, d\lambda}} \qquad (3.3.11)$$

وكذلك

$$\boxed{tg\,\tau' = \frac{dy}{dx}} \qquad (3.3.12)$$

فلكي يكون الارتسام مطابقا يجب ان يكون لدينا $(\tau = \tau')$ أي :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\, d\lambda}$$

ومنه بالاستعانة بـ (3.4.1) وتعويض dy و dx نجد :

$$\frac{R\, d f(\varphi)}{R\, d\lambda} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\, d\lambda}$$

أي

$$\boxed{d f(\varphi) = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}} \qquad (3.4.2)$$

ومنه

$$f(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \quad (3.4.3)$$

وتصبح قوانين التحويل (3.4.1)

$$x = R\lambda$$
$$y = R\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1}{2}R\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \quad (3.4.4)$$

تسمى الكمية $\mathcal{L}=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ بالعرض المتزايد او محول ميركاتور

لنحسب نسبة التغير الطولي m لدينا

$$ds = R^2\left(d\varphi^2+\cos^2\varphi\, d\lambda^2\right)$$

$$ds'^2 = dx^2+dy^2 = R^2\left(d\lambda^2+\overline{df(\varphi)}^2\right)$$

وبادخال قيمة $df(\varphi)$ من (3.4.2) نجد :

$$ds'^2 = R^2\left(d\lambda^2+\frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi}\right)=\frac{R^2}{\cos^2\varphi}\left(d\varphi^2+\cos^2\varphi\, d\lambda^2\right)$$

فتكون نسبة التغير الطولي :

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\cos\varphi} \quad (3.4.5)$$

نلاحظ انه كما ذكرنا في الفقرة (3.2) في حالة الارتسامات المطابقة ان نسبة التغير الطولي لا تتعلق باتجاه العنصر ds بل هي تابعة فقط لوضع النقطة (φ بالعلاقة 3.4.5) .

لنبرهن الان على الشطر الثاني من نظرية تيسو باعتبار هذا الارتسام مطابقاً. لدينا :

$$dx = R\,d\lambda$$

$$dy = R\,df(\varphi) = R\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

وبالاستعانة بالعلاقتين (1.7.4) و (1.7.5) نجد :

$$dx = \frac{ds_p}{\cos\varphi} \qquad dy = \frac{ds_m}{\cos\varphi}$$

بتربيع وجمع هاتين العلاقتين مع الاخذ بعين الاعتبار العلاقة (1.7.6) نجد :

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(ds_p^2 + ds_m^2\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\, ds^2$$

او

$$\frac{dx^2}{\left(\frac{ds}{\cos\varphi}\right)^2} + \frac{dy}{\left(\frac{ds}{\cos\varphi}\right)^2} = 1$$

3 4 6

فمن اجل (ثابت = ds) نحصل على دائرة لامتناهية في الصغر مركزها النقطة (φ,λ) وتبين لنا العلاقة الاخيرة ان مرتسم هذه الدائرة هي دائرة •

لقد وضع ميركاتور هذا الارتسام في عام ١٥٦٩ ولاقى مجالا كبيرا في البحرية • فمن السهل ان تتبع السفينة طريقا ثابتا نحو نقطة معينة وتقطع في سيرها كل خطوط الزوال تحت زاوية ثابتة ان المسار المتبع الذى يقطع خطوط الزوال تحت زاوية ثابتة يسمى باللوكسودرومي (*loxodromie*) وهو منحن على الاهليلج أو الكرة • لقد وجدنا في ارتسام ميركاتور ان خطوط الزوال تمثل بمستقيمات متوازية (موازية لمحور oy) وبما ان الارتسام مطابق فمرتسم اللوكسودرومي هو خط مستقيم لان الخط المستقيم هو الذى يقطع في هذا الارتسام خطوط الزوال تحت زاوية ثابتة • وهكذا

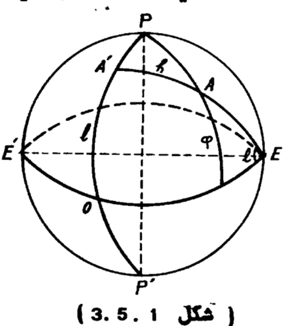
نرى انه في هذا الارتسام يكفي قياس الزاوية على الخريطة والمحافظة عليها لا تباع اللوكسودرومي •

ان هذا الحل بسيط ولكنه غير اقتصادي لان ارتسام ميركاتور يغير في الاطوال تغييرا هاما كلما ابتعدنا عن خط الاستواء • ان اللوكسودرولي ليس اقصر طريق بين نقطتين • بل يسمى اقصر طريق بالاورتودرومي (*Orthodromie*) وهو على الكرة قوس دائرة عظمى تقطع خطوط الزوال حسب زوايا متغيرة بين نقطة واخرى • لذلك يستخدم في البحرية في اغلب الاحيان طريق مؤلف من اقواس لوكسودرومية تصل بين نقاط من الاورتودرومي • ففي ارتسام ميركاتور يكون الطريق عندئذ مؤلفا من قطع مستقيمة •

يستخدم ايضا ارتسام ميركاتور لوضع خرائط المناطق الاستوائية •

(3.5) — ارتسام ميركاتور العرضاني او ارتسام غوص (*Gauss*) •

ان ارتسام ميركاتور العرضاني هو من الناحية الهندسية ارتسام ميركاتور السابق لكن خط زوال مبدئي يلعب نفس دور خط الاستواء فالاسطوانة تكون مماسة على طول خط زوال مبدئي يمر بشكل عام في منتصف المنطقة المراد تمثيلها •



(شكل 3.5.1)

نعتبر خط الزوال المبدئي POP' العمودي على مستوى اللوح (شكل 3.5.1) ولتكن A نقطة من الكرة ذات احداثيات (φ,λ) ان خط الاستواء عمودي على خط الزوال POP' فقطبا خط الزوال هذا أي E و E' يقعان على خط

الاستواء . لنرسم من النقطة A الدائرة العظمى EAA' فتقطع خط الزوال POP' في النقطة A' لنرمز بـ :

$$OA' = \ell \quad , \quad A'A = h$$

ان كل نقطة من الكرة يمكن تعريفها بالاحداثيات العمودية المنحنية (ℓ , h) نلاحظ ان h بالنسبة لخط الزوال POP' تلعب دور φ بالنسبة لخط الاستواء ، وكذلك تلعب ℓ دور λ فاذا طبقنا ارتسام ميركاتور السابق ولكن باعتبار الاحداثيات (ℓ, h) عوضا عن (φ , λ) نحصل على oy مرتسم OP و ox مرتسم OE ونجد القوانين التالية التي هي نفس القوانين (3.4.4) ولكن بالنسبة للاحداثيات الجديدة (ℓ, h) .

$$x = R\ \ln\ tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} R\ \ln \frac{1+\sin h}{1-\sin h} \qquad y = R\,\ell \qquad (3.5.1)$$

لكن هذه القوانين ليست قوانين تحويل للاحداثيات الجغرافية الى احداثيات مستوية لذلك علينا الان حساب (ℓ, h) بدلالة (φ, λ) .

لدينا من المثلث الكروي القائم $PA'A$ (شكل 3.5.2) قانون الجيوب :

(شكل 3.5.2)

$$\frac{\sin\lambda}{\sin h} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

ومنه

$$\sin h = \sin\lambda \ \cos\varphi \qquad (3.5.2)$$

ولدينا قانون التجيب بالنسبة للضلع ($\frac{\pi}{2} - \varphi$) :

$$\sin\varphi = \cos h \ \sin \ell \qquad (3.5.3)$$

ويعطينا قانون التجيب بالنسبة للضلع h :

$$\cos h = \sin\varphi \sin l + \cos\varphi \cos l \cos\lambda$$

وبادخال قيمة $\cos h$ هذه في العلاقة (3.5.3) نجد :

$$tg\ l = \frac{tg\ \varphi}{\cos\lambda} \qquad (3.5.4)$$

ومنه :

$$l = arc\ tg\ \frac{tg\ \varphi}{\cos\lambda} \qquad (3.5.5)$$

بادخال (3.5.2) و (3.5.5) نحصل على قوانين التحويل في ارتسام ميركاتور العرضاني :

$$x = \frac{1}{2} R\ ln\ \frac{1 + \cos\varphi \sin\lambda}{1 - \cos\varphi \sin\lambda}$$

$$y = R\ arc\ tg\ \frac{tg\ \varphi}{\cos\lambda} \qquad (3.5.6)$$

بوضع (ثابت = φ) في هاتين المعادلتين نجد المعادلتين الوسيطتين لمرتسم الموازى (ثابت = φ) وكذلك بوضع (ثابت = λ) في هاتين المعادلتين نجد المعادلتين الوسيطتين لمرتسم خط الزوال (ثابت = λ) .

من الطبيعي ان هذا الارتسام مطابق . ويمكننا حساب نسبة التغير الطولي في نقطة من العلاقة (3.4.5) على ان نعوض φ بـ h فنجد :

$$m = \frac{1}{\cos h}$$

وبادخال (3.5.2) في هذه العلاقة نجد العلاقة التالية :

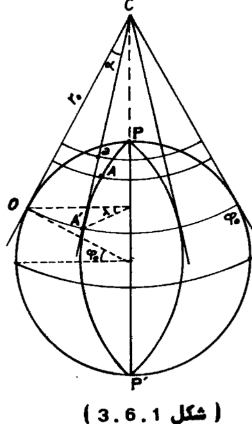
$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi \sin^2\lambda}} \qquad (3.5.7)$$

التي تعطينا نسبة التغير الطولي بدلالة الاحداثيات الجغرافية للنقطة .

ان هذا الارتسام مستخدم حاليا بشكل كبير وقد استخدم في المانيا والدول السكاندنافية وبريطانيا ، ويسمى بارتسام .U.T.M (Universal Transverse Mercator) .

(3.6) ـ ارتسام لامبير (Lambert) :

لنعتبر المخروط المماس للكرة على طول الموازي المار من منتصف المنطقة المراد تمثيلها في نقطة O ذات زاوية العرض φ_o ان رأس هذا المخروط C يقع على امتداد خط القطبين 'PP (شكل 3.6.1) لنمثل على هذا المخروط خطوط الزوال بمولدات المخروط ، فخط زوال 'PAA على الكرة يمثل بمولد للمخروط مماس لخط الزوال هذا في النقطة 'A ، حيث 'A نقطة تقاطع الموازي المار من O مع خط الزوال المار من A .



(شكل 3.6.1)

ولنمثل موازيات الكرة بموازيات على المخروط ولنحدد تباعدها فيما يلي بشكل يصبح فيه الارتسام مطابقا . اذا نشرنا هذا المخروط حصلنا على الشكل (3 . 6 . 2) ففي طريقة الارتسام هذه ، تمثل خطوط الزوال بمستقيمات متلاقية في النقطة C أما الموازيات فتمثل بدوائر متمركزة ذات مركز C وانصاف اقطار r لم تحدد الى الان .

لايجاد قوانين التحويل في هذا الارتسام نعتبر محورين متعامدين (o x y) المحور oy منطبق على المولد Co الممثل لخط الزوال المبدئي ومتجه نحو الشمال أما المحور ox فعمودي

عليه ومماس للدائرة الممثلة للموازى φ_0 (دائرة تماس الكرة مع المخروط) .

لنعتبر (شكل 3.6.2) ca المستقيم الممثل لخط الزوال المار من A ولتكن α الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع المحور oy كما لتكن الدائرة $a'b$ ذات المركز c الممثلة للموازى φ المار من A والتي هي مواز للمخروط قبل نشره .

لنرمز بـ $r = ca$ و $r_0 = co$

فاحداثيات النقطة a الممثلة لـ A هي :

$$x = r \sin \alpha$$
$$y = r_0 - r \cos \alpha \qquad (3.6.1)$$

ان r_0 هو طول المولد (شكل 3.6.1) وهو نصف قطر الدائرة oa الممثلة للموازى φ_0 ونلاحظ من الشكل (3.6.1) ان قيمة r_0 يمكن حسابها من العلاقة :

$$r_0 = R \operatorname{cotg} \varphi_0 \qquad (3.6.2)$$

(شكل 3.6.2)

لنحسب الان قيمة α .

لدينا على الكرة (شكل 3.6.1)

$$oA' = R \cos \varphi_0 . \lambda$$

حيث λ زاوية الطول بين خط الزوال المبدئي وخط الزوال المار من A و $R \cos \varphi_0$ نصف قطر الموازى المار من A .

نلاحظ بسهولة انه في طريقة الارتسام هذه محافظة على الاطوال حسب الموازى φ_0 فلدينا :

$$oA' = oa' = R\cos\varphi_0 \cdot \lambda$$

ومن ناحية ثانية (شكل 3.6.2) لدينا

$$Oa' = r_0 \cdot \alpha$$

بكتابة تساوى العلاقتين الاخيرتين نجد :

$$r_0\,\alpha = R\cos\varphi_0 \cdot \lambda$$

وبادخال (3.6.2) نجد :

$$\boxed{\alpha = \lambda \sin\varphi_0} \qquad (3.6.3)$$

يبقى علينا الان تعيين r وسنعيده للحصول على ارتسام مطابق •

لنعتبر على الكرة في النقطة A عنصرا جزئيا ds يصنع مع الموازى المار من A زاوية τ • لقد وجدنا (3.6.3) :

$$\boxed{tg\,\tau = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\, d\lambda}} \qquad (3.3.11)$$

ليكن ds' مرتسم ds في الارتسام السابق (شكل 3.6.2)

يمكننا ان نحلل ds' الى مركبتين متعامدتين

الاولى ds'_m محمولة على مرتسم خط الزوال

في A والثانية ds'_p محمولة على مرتسم

الموازى في A •

ds

$ds_m = R\,d\varphi$

τ

$ds_p = R\cos\varphi\, d\lambda$

(شكل 3.6.3)

ان مرتسم الزاوية τ هي بشكل عام τ'

(شكل 3.6.2) ويمكننا ان نكتب :

$$tg\,\tau' = \frac{ds'_m}{ds'_p} \qquad (3.6.4)$$

ولكن لدينا (شكل 3.6.2) :

$$ds'_m = dr \qquad (3.6.5)$$

$$ds'_p = r\,d\alpha$$

وبادخال تفاضل $d\alpha$ من (3.6.3) تصبح العلاقة الاخيرة :

$$ds'_p = r \sin \varphi_0 \, d\lambda \qquad (3.6.6)$$

ومنه تصبح العلاقة (3.6.4) باستخدام (3.6.5)و(3.6.6)

$$tg\,\tau' = \frac{dr}{r \sin \varphi_0 \, d\lambda} \qquad (3.6.7)$$

سنختار r بشكل يصبح فيه الارتسام مطابقا أى $\tau = \tau'$ فبكتابة تساوى العلاقتين (3.3.11)و(3.6.7) نجد بعد الاخذ بعين الاعتبار انه عندما تتزايد r تتناقص φ والعكس بالعكس : .

$$\frac{dr}{r} = -\sin \varphi_0 \, \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \qquad (3.6.8)$$

لنجد تكامل المعادلة (3.6.8) :

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = -\sin \varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

ومنه

$$\ln r - \ln r_0 = \ln \frac{r}{r_0} = -\sin \varphi_0 \, (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \qquad (3.6.9)$$

حيث

$$\mathcal{L} = \ln \, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\mathcal{L}_0 = \ln \, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) \qquad (3.6.10)$$

ويمكننا استنتاج من المعادلة(3.6.9)

$$r = r_0 \, e^{-\sin \varphi_0 (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)} \qquad (3.6.11)$$

لندخل الان(3.6.2) ، (3.6.3) و (3.6.11) في المعادلتين

(3.6.1) فنجد :

$$x = R \cot g\ \varphi_0 \sin(\lambda \sin \varphi_0)\, e^{-\sin \varphi_0 (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)}$$
$$y = R \cot g\ \varphi_0 \left[1 - \cos(\lambda \sin \varphi_0)\, e^{-\sin \varphi_0 (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)}\right] \quad (3.6.12)$$

وهي قوانين التحويل في ارتسام لامبير وهو ارتسام مطابق •

لنحسب الان نسبة التغير الطولي لدينا :

$$m = \frac{ds}{ds'}$$

ولكن

$$ds^2 = R^2 \left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2\right) \quad (1.7.7)$$

وكذلك

$$ds'^2 = ds'^2_m + ds'_p = dr^2 + r^2 \sin^2\varphi_0\, d\lambda^2 \quad (3.6.13)$$

وذلك بعد الاخذ بعين الاعتبار العلاقتين (3.6.5) و (3.6.6)

لندخل الان في (3.6.13) قيمة dr مأخوذة من (3.6.8) فنجد

$$ds'^2 = r \sin^2\varphi_0 \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} + r^2 \sin^2\varphi_0\, d\lambda^2 = \frac{r^2 \sin^2\varphi_0}{\cos^2\varphi}\left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2\right)$$

ونجد

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{r \sin\varphi_0}{R \cos\varphi} \quad (3.6.14)$$

كما تبين لنا هذه العلاقة ان مرتسم دائرة لامتناهية في الصغـــــر (ثابت = ds) هو دائرة (حيث نجد من هذه العلاقة ثابت= ds')

لقد استخدم هذا الارتسام في وضع خرائط فرانسا بمقيـــــــــــاس $\frac{1}{20\,000}$ و $\frac{1}{50\,000}$ و $\frac{1}{100\,000}$ •

كما استخدم لوضع خرائط سورية ولبنان ذات المقاييس $\frac{1}{50\,000}$ و $\frac{1}{200\,000}$ و $\frac{1}{500\,000}$ •

(3.7) ـ الارتسامات المنظورية :

لنعتبر مستويا للارتسام ونقطة للنظر ننظر منها الى السطح •

ولنأخذ تقاطع الاشعة أو امتدادها مع مستوى الارتسام ، فنحصل على تمثيل مسطح للسطح أو لجزء منه . نسمي هذا الارتســـــام بالارتسام المنظوري . نلاحظ ان الارتسام المنظوري يتغير بتغير نقطة النظر ووضع مستوى الارتسام ، فلدينا عدد لانهائي مـــــن الارتسامات المنظورية .

نقول ان الارتسام قطبي عندما نختار مستوى الارتسام مماســا للكرة في القطب ، وعندما نعتبر نقطة النظر واقعة على خط القطبين. يمكننا ان نختار نقطة النظر في مركز الكرة وعندئذ نحصل على ارتسام مركزي ، ويمكننا اختيارها نقطة القطب نظيرة نقطة تماس مســـــتوى الارتسام بالنسبة لمركز الكرة وعندئذ نسمى الارتسام بالستيريوغرافي القطبي ، وهكذا فلدينا عدد كبير من الارتسامات المنظورية القطبية .

ليكن H مستوى الارتسام مماسا للكرة في النقطة P . لنعتبر نقطة النظر C واقعة على خط القطبين وعلى بعد k من مركز الكرة نحصل على مرتسم نقطة A من الكرة بوصل النقطة A بالنقطة C وبتحديد هذا الاتجاه حتى تلاقيه مع المستوى H في النقطة a فتكون a مرتسم A ، (شكل 3.7.1) .

نلاحظ بسهولة انه مهما كانت قيمة k فان خطوط الزوال تمثل بمستقيمات متلاقية في النقطة P . أما الموازيات فتمثل بدوائر متمركزة ذات مركز P .

يمكننا تعريف هذا الارتسام تحليليا بسهولة بايجاد قوانيـــن تحويل الاحداثيات الجغرافية الى احداثيات قطبية (r , θ) فـــي المستوى ، حيث θ هي الزاوية التي يصنعها الشعاع (Pa = r) مع مستقيم من المستوى نعتبره مرتسم خط الزوال المبدئي ، و r

نصف قطر مرتسم الموازى المار من A •

لدينا (3.7.1) $\boxed{\theta = \lambda}$

لنحسب الان r • لدينا من تشابه المثلثين CDA و CPa (شكل 3.7.2)

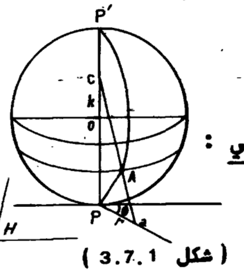
(3.7.2) $$\boxed{r = \frac{R\cos\varphi(k+R)}{k+R\sin\varphi}}$$

فمن اجل k = 0 نحصل على ارتسام مركزى

ومن اجل k = R نحصل على ارتسام ستيريوغرافي القطبي

ومن اجل k=2R نسمي الارتسام بارتسام بوستيل (G.Postel) •• الخ

وسندرس هنا فقط الارتسام الستيريوغرافي القطبي الذى هو ارتسام مطابق •

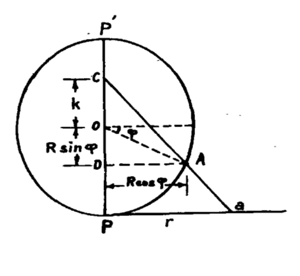


(شكل 3.7.1)

(3.8) — الارتسام الستيريوغرافي القطبي :

لنعتبر في هذا الارتسام مستوى التمثيل المستوى المماس للكرة في احد القطبين ونقطة النظر في القطب الاخر •

لقد بينا في الفقرة السابقة ان خطوط الزوال تمثل بمستقيمات متلاقية في نقطة التماس • أما الموازيات فتمثل بدوائر متمركزة مركزها القطب المماس للمستوى فلدينا اذن جملة متعامدة في المستوى هي مرتسم الجملة



(شكل 3.7.2)

المتعامدة (φ, λ) على الكرة •

يمكننا ايجاد قوانين تحويل الاحداثيات الجغرافية الى احداثيات قطبية في المستوى من العلاقتين (3.7.1) و (3.7.2) بوضع $k = R$ فنجد :

$$\theta = \lambda \qquad (3.8.1)$$

$$r = R\,\frac{2\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \qquad (3.8.2)$$

ان الارتسام الستيريوغرافي القطبي مطابق • ولبرهان ذلك نعتبر على الكرة العنصر الخطي ds في النقطة $A(\varphi,\lambda)$ ولتكن τ الزاوية التي يصنعها هذا العنصر مع الموازى المار من A و ds_m و ds_p مركبتي ds حسب خط الزوال والموازى المارين بـ A •

ان مرتسم A هي النقطة a (شكل 3.8.1) احداثياتها (θ, r) معطاة بالعلاقتين (3.8.1) و (3.8.2) ويكون مرتسم العنصر ds هو ds' ذا مركبتين الاولى dr . ممثلة لـ ds_m ومحمولة على نصف قطر الدائرة المارة من a والثانية($r\,d\theta$) ممثلة لـ ds_p ومحمولة على محيط الدائرة المارة من a • ان مرتسم الزاوية τ هي الزاوية τ' التي يصنعها العنصر ds' مع مرتسم الموازى المار من a •

(شكل 3 . 8 . 1)

يمكننا ان نكتب :

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{d\varphi}{\cos\varphi\, d\lambda} \qquad (3.3.11)$$

ومن الشكل (3.8.1) :

$$\operatorname{tg}\tau' = \frac{dr}{r\,d\theta} \qquad (3.8.3)$$

ولكن من قوانين التحويل (3.8.1) و (3.8.2) نجد

$$d\theta = d\lambda \qquad (3.8.4)$$

$$dr = 2R \frac{d\varphi}{1+\sin\varphi} \qquad (3.8.5)$$

(وذلك باعتبار تناقص r عند ازدياد φ وبالعكس) •

بادخال قيمة dr و dθ في (3.8.3) نجد :

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{d\varphi}{\cos\varphi \, d\lambda}$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (3.3.11) نستنتج ان $\tau = \tau'$

أي ان الارتسام مطابق •

لنحسب الان نسبة التغير الطولي :

لدينا :

$$ds^2 = R^2\left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi \, d\lambda^2\right) \qquad (1.7.7)$$

ومن الشكل (3.8.1)

$$ds'^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

وبادخال (3.8.4) و (3.8.5) و (3.8.2)

$$ds^2 = \frac{4R^2 d\varphi^2}{(1+\sin^2\varphi)^2} + \frac{4R^2}{(1+\sin\varphi)^2} \cos^2\varphi \, d\lambda^2 = \frac{4}{(1+\sin\varphi)^2} R^2\left(d\varphi^2 + \cos^2\varphi \, d\lambda^2\right)$$

ومنه نجد

$$m = \frac{ds'}{ds} = \frac{2}{1+\sin\varphi} \qquad (3.8.6)$$

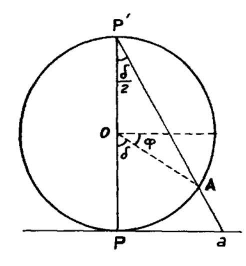
ويمكننا ايجاد علاقة ثانية لـ m .

لنعتبر خط الزوال المار من A (شكل 3.8.2) ولنضع $P\hat{O}A = \delta$

فيكون لدينا $P\hat{P'}A = \frac{\delta}{2}$ و $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$

بادخال δ في العلاقة (3.8.6) نجد :

$$m = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} = \frac{2}{1 + \cos\delta} = \frac{1}{\cos^2\frac{\delta}{2}} = 1 + tg^2\frac{\delta}{2}$$



(شكل 3.8.2)

ولكن لدينا من الشكل (3.8.2) :

$$tg^2\frac{\delta}{2} = \frac{r^2}{4R^2}$$

فتصبح قيمة m :

$$m = \frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{r^2}{4R^2} \qquad (3.8.7)$$

تعطينا هذه العلاقة نسبة التغير الطولي بدلالة بعد النقطة a عن مركز الارتسام P •

تطبيق : لنفرض R=6400 و $r = 150^{km.}$ نجد

$$m = 1 + \frac{r^2}{4R^2} = 1 + 1,37 \times 10^{-4}$$

فمن اجل ضلع ds يساوى كيلو متر على بعد $150^{km.}$ من مركز الارتسام يعاني هذا الضلع في هذا الارتسام تغيرا طوليا قدره 13.7^{cm} .

لايجاد قوانين تحويل الاحداثيات الجغرافية الى احداثيات عمودية في المستوى نعتبر في مستوى التمثيل محورين للاحداثيات ، الاول Py مماس لخط الزوال المبدئي والثاني Px عمودى عليه • يمكننا ان نكتب :

$$x = r \sin\theta$$
$$y = r \cos\theta$$

بادخال قيمة r و θ حسب العلاقتين (3.8.1) و (3.8.2) نجد :

$$x = 2R\,\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\,\sin\lambda$$
$$y = 2R\,\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\,\cos\lambda \qquad (3.8.8)$$

للارتسام الستيريوغرافي خاصة هامة هي التالية :

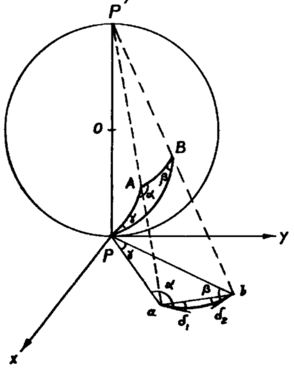
بتطبيق ارتسام ستيريوغرافي للكرة على المستوى ترتسم كل دائرة كبيرة أو صغيرة على الكرة حسب دائرة أو مستقيم ٠ لقد وجدنا هذه الخاصة بالنسبة لخطوط الزوال التي ترتسم كمستقيمات وبالنسبة للموازيات التي ترتسم كدوائر ٠ لنبرهن هذه الخاصة بالنسبة لدائرة ما ٠

لذلك نعتبر دائرة صغيرة $T_1 T_2 T_3 T_4$ مرسومة على الكرة (شكل 3.8.3) وليكن $Q T_1 T_2 T_3$ المخروط ذو الرأس Q المماس للكرة على طول هذه الدائرة ٠ ان رأس المخروط Q يرتسم بالارتسام الستيريوغرافي القطبي في النقطة q أما مولدات المخروط فترتسم حسب مستقيمات مارة بالنقطة q ٠

ان نقاط تماس المولدات ... T_1, T_2 (شكل 3.8.3) مع الدائرة الصغيرة موجودة على الكرة ، وأما الزوايا بين المولدات والدائرة فهي قائمة ، وبما ان الارتسام مطابق فالزوايا يحافظ عليها أى أن مرتسم الدائرة T_1, T_2, T_3 يصنع زوايا قائمة مع مرتسمات المولدات ، فهذا المرتسم هو دائرة مركزها q ٠ ونحصل على نفس النتيجة اذا اعتبرنا دائرة كبرى على الكرة ، ففي هذه الحالة يتحول المخروط الى اسطوانة ٠

سنستفيد من هذه الخاصة لحساب قيم التصحيحات في الارتسام الستيريوغرافي ٠

لنعتبر المثلث الكروي PAB (شكل 3.8.4) • ان الضلع PA والضلع PB هما خطا زوال • فمرتسمهما مستقيمان Pa وPb أما الضلع AB فهو قوس دائرة عظمى • فمرتسم حسب قوس دائرة $\widehat{ab}$ وذلك بموجب الخاصة السابقة •



بما ان الارتسام مطابق فزوايا المثلث الكروي يجب ان تساوى لزوايا المثلث المسطح ذى الضلع المنحني $\widehat{ab}$ وهذا ما نعنيه بالمحافظة على الزوايا (3 . 1) فالزاوية في النقطة a بين Pa والمماس للمنحني (شكل 3.8.4) $\widehat{ab}$ تساوى للزاوية الكروية المقابلة α وكذلك فان الزاوية في النقطة b بين Pb والمماس للمنحني $\widehat{ba}$ تساوى للزاوية الكروية المقابلة β•

لنرمز بـ δ_1 و δ_2 بزوايا الاختزال الى الوتر •

بما ان القوس ab هو قوس دائرة • فلدينا $\delta_1 = \delta_2$ يمكننا ان نكتب :

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^{gr} + \varepsilon \qquad (3.8.9)$$

حيث ε هي الزيادة الكروية في المثلث •

لنضع $\begin{matrix}\alpha = \alpha' + \delta_1 \\ \beta = \beta' + \delta_2\end{matrix}$ حيث $\alpha' = P\widehat{a}b$ و $\beta = P\widehat{b}a$

ومنه تصبح العلاقة (3 . 8 . 9)

$$\alpha' + \beta' + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 200^{gr} + \varepsilon$$

ولكن لديا $\alpha' + \beta' + \gamma = 200$

نستنتج اذن : (3 . 8 . 10) $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$

وحسب العلاقة (2 . 3 . 3)

$$\delta_1^{cc} = \delta_2^{cc} = \rho^{cc} \frac{T}{2R^2} \qquad (3 . 8 . 11)$$

حيث T مساحة المثلث الكروى ، بما ان δ_1 و δ_2 ذا قيم صغيرة فيمكننا اعتبار مساحة المثلث الكروى مساوية لمساحة المثلث Pab دون ان تتأثر النتائج ، فاذا اعتبرنا (x_a , y_a) (x_b , y_b) احداثيات النقطتين a و b (مقروئين من مستوى التمثيل) فـــان مساحة المثلث تكون على اعتبار رأس المثلث P مبدأ للاحداثيات :

$$T = \frac{x_a y_b - x_b y_a}{2}$$

وتصبح العلاقة (3 . 8 . 11)

$$\delta_1^{cc} = \delta_2^{cc} = \rho^{cc} \frac{x_a y_b - x_b y_a}{4R^2} \qquad (3 . 8 . 12)$$

ولنذكر ان R هو نصف قطر الكرة •

ان العلاقة (3 . 8 . 12) تسمح لنا بحساب زوايا الاختزال الى الوتر ، أما لمعرفة اتجاه الزاويتين δ_1 و δ_2 بالنسبة للوتر فيكفي ان ننتبه الى ان القوس $\widehat{ab}$ دومايوجه تقعره نحو مركز الارتسام P.

لنعتبر الان مثلثا كرويا ما مرسوما على الكرة • ان مرتسم هـــذا المثلث هو مثلث منحن abc ولدينا محافظة على الزوايا ، فالزوايـــا (α , β , γ) بين المماسات للاضلاع المنحنية (شكل 5 . 8 . 3) تساوى للزوايا الكروية المقابلة على الكرة • لحساب زوايا المثلـــث المسطح ذى الاضلاع المستقيمة علينا اولا حساب قيم التصحيحـــات الزاوية (δ_1 , δ_2) بالنسبة لكل ضلع ويمكننا ذلك بتطبيق العلاقـــة

(3.8.12) بالنسبة لـ $\widehat{ab}$ ثم $\widehat{ac}$ ثم $\widehat{bc}$ •

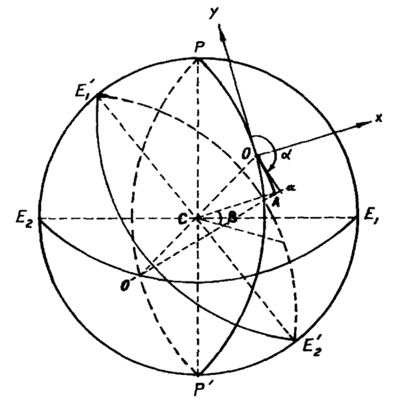
لاقت طريقة الارتسام الستيريوغرافي القطبي مجالاً واسعا عندما اخـــذت المسارات الجوية بين الاتحاد السوفييتي والولايات المتحدة أهمية استراتيجيـــة اذ ان المسارات بين الدولتين تمـــر بالمناطق القطبية الشمالية • ويستخدم (شكل 3 . 8 . 5) هذا الارتسام لتمثيل المناطق القطبية • وايضا لوضع خريطة القبة السماوية • ويستخدم في المناطق القطبية •

هذا ولنذكر من مميزات هذا الارتسام ان المسارات الاورتودرومية التي هي اقواس دوائر عظمى (خطوط جيوديزية) ترتسم في طريقة الارتسام هذه • حسب دوائر في المستوى •

(3 . 9) ــ الارتسام الستيريوغرافي المائل :

لتكن o منتصف المنطقة المراد تمثيلها • لنعتبر المستوى $o\,x\,y$ المماس في النقطة o للكرة • ولنختر في هذا المستوى المحور $o\,y$ مماسا لخط الزوال المار من o ومتجها نحو الشمال والمحـــور $o\,x$ عموديا عليه ومتجها نحو الشرق • لتكن o' نظيرة النقطة o بالنسبة لمركز الكرة c • لنعتبر هذه النقطة o' نقطة نظر ولنمثل نقاط الكرة على المستوى $o\,x\,y$ • فنقطة A على الكرة ترتسم علـــى المستوى بوصل النقطة o' بالنقطة A ثم بتمديد هذا الاتجاه الى ان يلتقي مع المستوى في النقطة a التي تعتبر مرتسم النقطـــة A (شكل 3 . 9 . 1).تسمى طريقة الارتسام هذه • بالارتسام الستيريوغرافي المائل •

لا يختلف هذا الارتسام من ناحية الخواص الهندسية الواردة في الفقرة السابقة عن الارتسام الستيريوغرافي القطبي الذى اعتبرنا فيه مستوى الارتسام مماسا للكرة في القطب P ونقطة النظر في القطب الاخر . لان لكافة اقطار الكرة نفس خواص خط القطبين PP' فالارتسام اذن مطابق وترتسم كل دائرة كبيرة أو صغيرة كدائرة أو مستقيم فالدوائر العظمى المارة من OO' ترتسم كمستقيمات . أما خطوط الزوال فترتسم كدوائر ماعدا خط الزوال المبدئي المار



(شكل 3.9.1)

من O فيرتسم حسب المستقيم Oy . ان القطر OO' في هذا الارتسام يلعب دور خط القطبين في الارتسام الستيريوغرافي القطبي كما ان الدائرة $E_1' E_2'$ العمودية على OO' وذات المركز C (مركز الكرة) ، تلعب دور خط الاستواء في الارتسام الستيريوغرافي القطبي . من هنا نستنتج ان القوانين التي وضعناها بدلالة φ و λ تبقى على ان نبدل φ و β و λ بـ α حيث β هي الزاوية التي يصنعها القطر الواصل الى نقطة A مع المستوى $E_1' E_2'$ و α هي الزاوية الثنائية بين مستوى الزوال المبدئي ومستوثان مار من O ومركز الكرة ونقطة A على الكرة .

ان هذا المستوى الاخير يقطع الكرة حسب قوس الدائرة العظمى OA ، فالزاوية α هي الزاوية في النقطة o بين المماس لخط الزوال المبدئي والمماس لقوس الدائرة oA ، فهي اذن زاوية السمت الجغرافي لـ oA وهي في مستوى التمثل بين المحور oy والمستقيم oa .

ان قوانين تحويل الاحداثيات (α , β) الكروية الى احداثيات عمودية x , y في مستوى الارتسام هي حسب العلاقتين (3.8.8) :

$$x = 2R \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \sin \alpha$$
$$y = 2R \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} \cos \alpha \qquad (3.9.1)$$

أما العلاقات التي سبق ان وجدناها بشكل مستقل من الاحداثيات الجغرافية فهي نفسها كالعلاقة (3.8.7) والعلاقة (3.8.11) والعلاقة (3.8.12) .

الا انه علينا ان نعطي قوانين التحويل (3.9.1) بدلالة الاحداثيات الجغرافية (φ, λ) ، لذلك نستعين بالمثلثات الكروية ، فلدينا في المثلث الكروي POA (شكل 3.9.1) و (شكل 3.9.2) .

العناصر التالية :

$PO = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ حيث φ_0 زاوية عرض النقطة o .

$PA = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$OA = \frac{\pi}{2} - \beta$

$O\hat{P}A = \lambda$

$P\hat{O}A = \alpha$

(شكل 3.9.2)

ان علاقة التجيب بالنسبة للضلع OA تكتب على الشكل :

$$\sin\beta = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda \qquad (3.9.2)$$

وعلاقة الجيوب تعطينا

$$\sin\alpha \cos\beta = \cos\varphi \sin\lambda \qquad (3.9.3)$$

أما علاقة التجيب بالنسبة للضلع PA فهي

$$\sin\varphi = \sin\beta \sin\varphi_0 + \cos\beta \cos\varphi_0 \cos\alpha$$

من هذه العلاقة الاخيرة نستنتج :

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\sin\varphi - \sin\beta \sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}$$

وبادخال (3.9.2) نجد

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\sin\varphi - \sin\varphi \sin^2\varphi_0 - \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda \sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}$$

ومنه

$$\cos\alpha \cos\beta = \sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \cos\lambda \sin\varphi_0 \qquad (3.9.4)$$

وبالتبديل في (3.9.1) نجد

$$x = 2R \frac{\cos\varphi \sin\lambda}{1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda}$$

$$y = 2R \frac{\sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \cos\lambda \sin\varphi_0}{1 + \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda} \qquad (3.9.5)$$

ان الارتسام الستيريوغرافي المائل يناسب المناطق التي هي على شكل كرة . وهو مستخدم في الدوائر العقارية في سوريا

ولبنان لوضع الخرائط وقد اعتبرت O في تدمر ونسبت الاحداثيات المستخدمة في الدوائر العقارية الى محورين Ox و Oy •

(3 . 10) — فائدة الارتسامات المطابقة :

هنالك حقيقتان هامتان دفعتا الجيوديزيين الى الاهتمام بالارتسامات المطابقة :

١ — فخلال الحرب العالمية الاولى تطلبت المدفعية ارتسامات مطابقة لعمليات التحضير للتصويب الصحيح والسريع • لان هذه الارتسامات تحافظ على الزوايا • فالزوايا المعينة على الخريطة تساوى للزاوية المقاسة على الطبيعة • لكننا سبق ان ذكرنا انه يجب ان نفهم بالمحافظة على الزوايا في ارتسام مطابق هو ان الزاوية بين قوسين على الكرة أو الاهليلج تساوى للزاوية بين المماسين لمرتسمي القوسين • وان مرتسمات الاقواس على الكرة أو الاهليلج هي بشكل عام منحنيات في المستوى • فيما ان الزوايا التي نعتبرها على الخريطة هي بين مستقيمات لا منحنيات مستوية لذلك يبدو لنا ان هذه المحافظة على الزوايا هي وهمية • اذ يجب اضافة زوايا الاختزال الى الوتر للحصول على الزوايا المقاسة على سطح الارض •

لكن زوايا الاختزال الى الوتر هي صغيرة بشكل عام ويمكن اهمالها في هذه المجالات •

٢ — هنالك ميزة كبرى في استخدام ارتسام مطابق بالنسبة لعمليات التثليث من الدرجة الرابعة (الفصل الرابع) والمسماة بالتثليث العقارى • ففي هذه العمليات غالبا ما تعين النقاط بعمليات

التقاطع والتقويم المستندة الى قياس زوايا افقية فقط ، فالزوايا ترتسم على المستوى بقيمتها ، ويمكننا غالبا اهمال قيم زوايـا الاختزال الى الوتر فحسب بسهولة الاحداثيات العمودية لهذه النقاط فورا على مستوى التمثيل دون اللجوء الـى حسابات على الكرة أو الاهليلج ثم تحويل الاحداثيـات الجغرافية الى احداثيات عمودية باستخدام قوانين التحويـل للارتسام • هذا واذا اردنا بشكل عام حساب الاحداثيـات العمودية فورا على المستوى يكفي حساب زوايا الاختزال الى الوتر ومن ثم حساب الزوايا المستوية بين المستقيمات بـأن نضيف (اضافة جبرية) زوايا الاختزال الى الزوايا الكرويـة (أى المقاسة) ، وتطبيق قوانين المثلثات المستوية وقوانين الهندسة التحليلية المستوية لحساب الاحداثيات •

لقد بينا في الارتسام الستيريوغرافي العلاقة (3.8.12) التي تسمح بحساب زوايا الاختزال الى الوتر بدلالـة الاحداثيات العمودية ولحسابها يكفي قراءة الاحداثيـات تخطيطيا بعد انشاء بسيط للنقاط على المخطط •

ولدينا في كافة الارتسامات المطابقة قوانين تسمح بهذا زوايا الاختزال استنادا الى الاحداثيات العمودية •

الفصـــل الرابـــع

الشـــبكات الجيود يزية

(4.1) — تعريف الشبكات الجيود يزية وتقسيماتها :

لا جراء عمليات المسح ورسم المخططات في دولة ما يعتبر عدد من النقاط موزعة في مختلف المناطق ، تجسد هذه النقاط بشكل دائم على الارض وتحسب احداثياتها ، تشكل هذه النقاط هيكلا اســاســيا للاعمال المساحية وتسمى بالنقاط الجيود يزية ، وهي تشكل ذروات شبكة من المثلثات نسميها بالشبكة الجيود يزية للبلاد •

تفيدنا هذه الشبكة في عدد من المجالات ، فنستعين بهــا في اعمال المساحة العقارية ونستفيد منها في مختلف الاعمال المساحية في الهندسة المدنية لدراسة الطرق والجسور ومشاريع الرى الخ •••

تشكل هذه النقاط والمعتبرة صحيحة بالنسبة للاعمال المساحية قاعدة لكافة الاعمال المساحية ، فنستطيع ان ننطلق منها ونوٴســــــس مضلعات للمسح التفصيلي وان نحسب ذروات هذه المضلعات اعتمــادا على احداثيات هذه النقاط وعلى قياسات المضلعات ، ويمكننا تــسكير هذه المضلعات على هذه النقاط ذات الاحداثيات المعروفة وبذلــك نضمن خلو المضلعات من الانخلاط ونوٴمن تعديلا لاحداثيات ذروات المضلعات مما يزيد في دقة النتائج المساحية بشكل عام • ويجــب ان لاننسى انه لربط الاعمال المساحية بالشبكة الجيود يزية فائدة كبيــرة اذ تسمح بأن نوجه المخططات المساحية توجيها واحد هو نفــــس توجيه الخرائط العامة للبلاد •

ان احتياجات المساحة للنقاط الجيود يزية هي بمتوسط نقطة

كل ثلاثة كيلو مترات مربعة ، ويجب زيادة هذه الكثافة لتأمين اعمال مساحية دقيقة في المناطق المأهولة والاراضي ذات السعر المرتفع أى في مناطق الدرجة الاولى المحددة من قبل المصالح العقارية .

ينتج عن هذه الكثافة ، ان عدد النقاط الجيوديزية يجب ان يكون كبيرا جدا وعلينا ان نتخذ الاحتياطات الضرورية للحصول على دقة واحدة لمختلف نقاط الشبكة . اذ ان الشرط الاساسي في شبكة وهو تجانس الدقة في مختلف مناطق البلاد . ان هذا الشرط يصعب تحقيقه اذا انطلقنا في تأسيس الشبكة اعتبارا من ضلع ما وانشأنا مثلثات اطوال اضلاعها بحدود ثلاثة كيلو مترات ، واجرينا القياسات اللازمة لتعيين احداثيات الذروات اذ يترتب على طريقة العمل هذه اجراء القياسات بدقة كبيرة لتقليل تراكم اخطاء القياسات وهذا مايؤدى الى تكاليف باهظة .

نتوصل الى نتيجة اقتصادية ودقيقة اذا اسسنا الشبكة العامة على مراحل ، أى اذا انشأنا اولا شبكة من المثلثات الكبيرة التي تغمر البلاد والتي تعتبر هيكلا رئيسيا لشبكة ثانية ثم انشأنا شبكة ثانية تستند على الاولى ثم شبكة ثالثة الخ ....

وعلى هذا الاساس تقسم الشبكة الجيوديزية العامة الى اربعة اقسام :

١ — الشبكة الجيوديزية من الدرجة الاولى أو شبكة التثليث الرئيسية .

٢ — الشبكة الجيوديزية (أو شبكة التثليث) من الدرجة الثانية .

٣ — الشبكة الجيوديزية (أو شبكة التثليث) من الدرجة الثالثة .

٤ — الشبكة الجيوديزية (أو شبكة التثليث) من الدرجة الرابعة والمسماة بشبكة التثليث العقارية .

تتألف الشبكة الجيوديزية الرئيسية من مثلثات ذ رواتها نقاط جيوديزية رئيسية • ان اطوال اضلاع مثلثات الشبكة الرئيسية تتراوح بين 40 km. و 100 km. ومن هنا يتبين ان عدد النقاط الجيوديزية من الدرجة الاولى قليل نسبيا ، مما يسمح بتأمين وقت كاف لمختلف عمليات القياس والحساب للتوصل الى دقة كبيرة في تعيين احداثيات هذه النقاط • سوف لا نتعرض هنا الى القياسات والحسابات التي تتم على الاهليلج اذ انها تخرج عن هذا المنهاج ، بل نكتفي بأن نقول انه اضافة الى القياسات الزاوية والطولية التي تتم لهذه الشبكة على سطح الارض فانه تقاس الاحداثيات الفلكية لعدد من النقاط (ونسميها بنقاط لابلاس) مما يسمح بمعرفة انحرافات الشاقول والاستدلال عن شكل الجيوئيد •

تكون نقاط الشبكة الرئيسية بعيدة بعضها عن بعض ولا تسمح برؤية المناطق القريبة منها ، لذلك توضع شبكة ثانية تستند الى الشبكة الرئيسية وتحسب اعتبارا منها ، نسميها بشبكة التثليث من الدرجة الثانية • نختار موقع كل نقطة من نقاط هذه الشبكة بطريقة نضمن معها رؤية عدد كاف من نقاط الدرجة الاولى ونقاط الشبكة الثالثة التي ستستند الى الشبكة الرئيسية والشبكة الثانية ، تتراوح اضلاع الشبكة الجيوديزية من الدرجة الثانية بين 15 km. و 25 km. أما اضلاع الشبكة الثالثة فتكون عادة بين 5km. و 10 km. •

هذا ويتم في كثير من الاحيان تعيين نقاط الشبكة الثالثة بطريقة التقاطع والتقويم أو بطريقة التضليع الدقيقة (في الاراضي المنبسطة) •

واخيرا ، فاستنادا الى النقاط السابقة يعين عدد من النقاط

تشكل بمجموعها شبكة تثليث رابعة نتوصل فيها الى الكثافة المطلوبة الضرورية لاحتياجات الساحة ، ويتم تعيين نقاط الشبكة الرابعة بطريقة التقويم والتقاطع أو بطريقة التضليع في الاراضي المنبسطة•

تجرى دوما قياسات فائضة في عمليات التثليث ، فهذه القياسات الفائضة تسمح من جهة باكتشاف اغلاط القياس والتخلص منها ومن جهة ثانية تؤمن لنا تعديلا للقياسات مما يزيد في الدقة •

يتم التعديل وفق مبدأ المربعات الصغرى الذى سنشرحه في الفصل السادس ، كما اننا سنشرح حساب وتعديل نقاط الدرجة الرابعة المعينة بالتقاطع والتقويم في الفصل السابع ، وسنعين طريقة تعديل احداثياتها وفق مبدأ المربعات الصغرى •

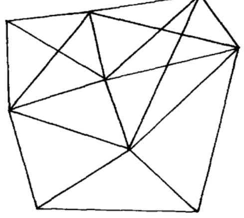
(4.2) ـ الشروط المفروضة على الشبكات الجيوديزية :

يجب ان تكون النقاط الجيوديزية جملة متجانسة ، أى ان تتمتع كل نقطة بنفس الدقة • تعتمد هذه الدقة من جهة على دقة القياسات ومن جهة ثانية على الاشكال الهندسية المشكلة من خطوط الرصد والتي يجب ان تحقق خواصا لابد منها للحصول على نتائج مرضية •

من أهم هذه الخواص هو ان لا تقل زاوية من زوايا هذه الاشكال عن حد معين ويقدر هذا الحد الادنى بـ 30^{gr} • أما اضلاع الاشكال فيجب ان تكون متساوية الطول تقريبا كلما امكن ذلك ، ويمكن ان تكون الشبكة مؤلفة من اشكال رباعية أو خماسية أو أشكال ذات نقطة مركزية (شكل 4.2.1) •

ان وضع النقاط الجيوديزية على الطبيعة يتبع القواعد التالية :

١ — توضع نقاط الدرجة الاولى والثانية على قمم الجبال ، وهذا الشرط ضروري اذا اردنا اجراء رصد من كافة الاتجاهـــات لهذه النقاط •



٢ — أما نقاط الدرجة الثالثة فتوضع على التلال والنقاط التي يمكن منها رؤية نقاط الدرجة الاولى والثانية ثم رؤية عدد من نقاط الدرجة الرابعة •

(شكل 4.2.1)

٣ — بما اننا نستند بشكل عام الى نقاط الدرجة الرابعة للقيام بالاعمال المساحية فان وضعها يتبـــع الاحتياجات الطوبوغرافية • وهي توضع عادة في المناطـــق السهلة •

هذا ويجرى وضع نقاط الدرجة الثالثة والرابعة في المدن على المباني العامة والابراج والمآذن واجراس الكنائس •• الخ •

(4.3) — عملية الاستطلاع أو التعرف على الطبيعة :

يتطلب تطبيق الشروط الواردة في الفقرة السابقة بحثا طويـــلا ودقيقا على سطح الارض وتسمي هذه العملية بعملية الاستطلاع أو التعرف على الطبيعة ولها غاية أساسية هي التفتيش عن الامكانيات الموجـــودة لتأسيس شبكة تناسب الشروط المفروضة على الشبكات باحسن شكل وبطريقة اقتصاديـــة •

تكون شبكة جيوديزية اقتصادية اذا كان عدد خطوط الرصـــد الضرورية اقل مايمكن واذا كانت حجوم المنشآت التي ستؤسس لتجسيد النقاط اقل مايمكن •

ان المفهوم الاقتصادى هذا يعقد عملية الاستطلاع ويتطلب بحثا دقيقا اذا اردنا ان نقلل من عدد خطوط الرصد ، اذ علينا اختيار خطوط الرصد جيدا لتحقيق شروط الاشكال الواردة في الفقرة السابقة •

ان عملية الاستطلاع تسبق كل عمليات القياس ويمكن تسهيلها بدراسة أولية على خريطة ان وجدت فتشيء مقاطع طولية بين ذروات خطوط الرصد نستطيع بواسطتها معرفة امكانية تحقيق الرصد على الطبيعة ، وفي عملية الدراسة الاولية يجب الاستفادة الى حد ما من عمليات التثليث القديمة ان كانت موجودة ، وبعد الدراسة الاولية تظهر لنا عملية الاستطلاع الامكانيات التي لم نستطع ان نلمسها على الخريطة، فاستنادا الى عملية الاستطلاع نستطيع ان نقدر حجم الاشارات التي ستوضع •

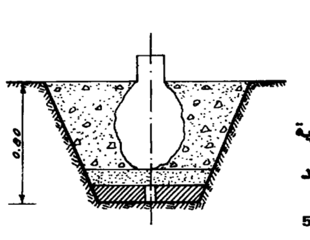
(4.4) ــ انشاء النقاط الجيوديزية والاشارات :

اذا راعينا الناحية الاقتصادية لتجسيد النقاط الجيوديزية علينا ان نؤسس اكبر عدد منها على الابنية العامة والابراج واجراس الكنائس والمآذن •• الخ ، ولكن كثافة هذه المنشآت وتوزعها لا يسمحان باسناد الشبكات الجيوديزية اليها فقط ، بل يجب اعتبار نقاط ثابتة من سطح الارض لتحقيق الشروط المشروحة في الفقرة (4.2) ، وفي هذه الحالة تجسد النقاط الجيوديزية بوضع اسطوانة من الفولاذ تسمى بالدليل في حفرة ذات عمق من 60^{cm} الى 100^{cm} يغمر الدليل في كمية من الاسمنت ذى سماكة تساوى ارتفاعه ، ويوضع فوقه طبقة من الرمل لحمايته (شكل 4.4.1) وفوق هذه الطبقة يركز حجر من الجرانيت أو من الكلس القاسي نسميه بالمرصد ، تكون قمته على شكل اسطوانة

أو مكعب •

تعين النقطة الوسطية للمرصد بحفرة صغيرة أو صليب ويركز المرصد بطريقة تكون فيها نقطة تقاطع الصليب أو الحفرة على شاقول الدليل •

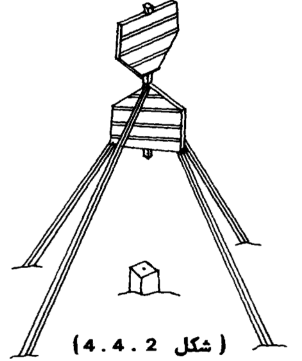
ان ارتفاع المرصد يختلف حسب درجة النقطة ويجب ان لا يقل عن 70cm وتكون ابعاد قمته بحدود 30cm x 40cm ، ويستعاض عن الدليل والمرصد في الاراضي الصخرية القاسية التي يصعب فيها الحفر بوتد من الحديد اسطواني طوله من 50cm الى 100cm ومقطعه بين 25cm و 35cm • يغرس هذا الوتد الى حافة الارض •



(شكل 4.4.1)

لتسهيل عملية التفتيش عن الدليل عند ضياع المرصد يعين موقعه اعتبارا من ثلاث نقاط قريبة منه وثابتة على الطبقة ويوضع لكل دليل مخطط صغير يبين وضعه بالنسبة للنقاط الثلاث ، ويشمل هذا المخطط اوصاف الدليل ، هذا وبالنسبة للنقاط الرئيسية غالبا ما يبنى فوق المرصد عمود من الحجر او البيتون ذى قاعدة مربعة علوية ابعادها بحدود 50cm وذلك لوضع جهات القياس عليها ، ويكون العمود مثقوبا بطريقة تسمح بتركيز الجهاز على شاقولية النقطة وتثبت الجهاز ، فهنا لا تستعمل ثلاثية ارجل لتركيز الجهاز وهذا اثبت وادق •

توضع اشارات على النقاط الجيوديزية وخاصة على نقاط الشبكة الرئيسية ونقاط الشبكة الثانية ، لنتمكن من رصدها من بعيد ، ويجب ان تكون الاشارات ذات اشكال هندسية بسيطة لها محور تناظر شاقولي يمر من شاقول الدليل ، ويسمى القسم العلوى المخصص للرصد بالميرا • (شكل 2 . 4 . 4)



(شكل 2 . 4 . 4)

تكون الاشارات من الخشب او من الحديد ، ويجب ان يكون ارتفاعها وحجمها متناسبا مع الطول الوسطي لخطوط الرصد وبحيث نرى في ساحة النظارة خيال الاشارة اكبر بقليل من خطوط المحكم •

يكون الافق المرئي في بعض المناطق المستوية محدودا ببضعة كيلو مترات ، ففي هذه الحالة يجب وضع اشارات مرتفعة جدا تحمل الميرا ، وفي بعض الاحيان لا يكفي وضع الميرا فحسب بل يجب اجراء القياسات ايضا في نقطة مرتفعة ، لذلك يؤسس حامل مرتفع ، وهذا الحامل عبارة عن هيكل خشبي أو حديدي مزود بمسطبة في اعلاه لوضع الجهاز واجراء القياسات •

الفصـــل الخامـــس

التسوية الهندسية الدقيقــة

(5.1) ــ تعريف التسوية الهندسية الدقيقة :

تطلق اسم التسوية الهندسية على التسوية المباشرة عند تطبيق طرق خاصة واتخاذ احتياطات واجراء تحقيقات بغية الحصول علـــى ارتفاعات دقيقة لنقاط من سطح الارض• فمن مهام الجيوديزيا تعيين ارتفاعات عدد من النقاط تشكل الهيكل الاساسي للمساحة الارتفاعية• أضف الى ان هنالك عددا كبيرا من الاعمال تتطلب معرفة الارتفاعـات بدقة كبيرة كقياس تغيرات السدود وتركيز القواعد للاجهزة الميكانيكيـة وقياس تغيرات القشرة الارضية ••• الخ •

تتميز التسوية الهندسية بما يلي :

١ ــ استخدام جهاز تسوية دقيق

٢ ــ استخدام ميرات من الانفار

٣ ــ تطبيق طريقة الرصد المتساوى ويجب تحقيقها بدقة $\pm 1^m$ بالنسبة لخطوط الرصد ذات الطول 60^m .

٤ ــ اتباع طرق خاصة للتحقيق

٥ ــ حين اللجوء الى طريقة السير يجب ان لا تتجاوز الاضلاع 60^m

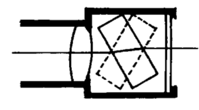
٦ ــ اجراء قياسات فائضة من شأنها تأمين تحقيق غير مباشر للقياسات واجراء تعديل لها •

٧ ــ تعديل القياسات وفق مبدأ المربعات الصغرى (الفصل السادس)

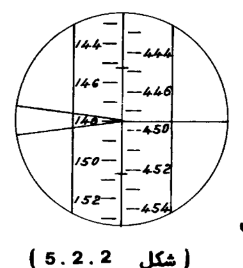
(5.2) ــ اجهزة التسوية الهندسية الدقيقة :

ان اجهزة التسوية الهندسية الدقيقة شبيهة من ناحية التركيب

بأجهزة التسوية المباشرة ومن بين اجهزة التسوية المباشرة نذكر نيفو :
(Niveau Wild N 3) • ان المميز في هذا الجهاز هو انـــه
مزود بميكرومتر ضوئي مؤلف بشكل رئيسي من صفيحة متوازية الوجــوه
(شكل 5.2.1) موضوعة امام جسمية النظارة
ومرتبطة بمحور افقي يمكنها الدوران حوله •
يتم هذا الدوران بتدوير اسطوانـة
مدرجة وهذا من شأنه احداث انتقــال
شاقولي لخيال الميرا فيمكننا بهذا الدوران
تحقيق تطابق بين تقسيم صحيح على الميرا
وخط المحكم الافقي وقياس هذا الانتقــال
على الاسطوانة المدرجة • ان النظــارة مرتبطة بزئبقية حلقية بعكــس
طرفا الفقاعة بواسطة جملة ضوئية (شكل 5.2.3) فبعد توجيه النظارة
الى الميرا ووضع فقاعة الزئبقية بين حديها
تحرك الاسطوانة المدرجة الى ان يتــم
انطباق خط المحكم مع تدريج من تدريجات
الميرا ثم تقرأ على الميرا ونقرأ على الاسطوانة
المدرجة مقدار الانتقال •
بهذه الطريقة نتمكن من اجراء تعيين
دقيق لقيمة اجزاء تقسيمات الميرا التي تغين
بالتسوية الهندسية بالتقدير •



(شكل 5.2.1)

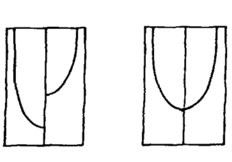


(شكل 5.2.2)

ان سعة انتقال شعاع الرصد حين تدوير الميكرومتر هي 10^{mm}
نتمكن بذلك من اجراء قراءة على الميكرومتر من اجل أي وضع لخط الرصد
فتجرى القراءات على الميرا بدقة $\frac{1}{10}$ من المليمتر •

ان الجهاز مزود بزئبقية كروية لتأمين شاقولية المحور الرئيسي أما تكبير النظارة فهو 42 ، وأما المحكم فيحوى على خطين ستاد يمترين يعطيان ثابتة ضرب ستاد يمترية (100) وقد عوض عن نصف الخط الافقي للمحكم بخطين متناظرين بالنسبة للنصف الثاني من الخط الافقي (شكل 5.2.2) وهما يسمحان باحاطة تقسيم من تقسيمات الميرا •

تستخدم مع اجهزة التسوية الدقيقة ميرات من الانفار طول كل واحدة ثلاثة امتار مؤلفة من قطعة واحدة.تحفر تدريجات الميرا على شريط من الانفار يوضع ضمن هيكل معدني أو خشبي بطريقة لا تؤثر على الشريط تغيرات الهيكل تحت تأثير الرطوبة والحرارة •



(شكل 5.2.3)

يحمل شريط الانفار على طرفيه تدريجات ، وكل تدريج من طرف يبعد عن تدريج من الطرف الاخر بقيمة ثابتة ، فلدينا مقياسان على كل طرف من الميرا وغاية ذلك امكانية اجراء قراءتين على الميرا لحذف اغلاط القراءة • •

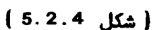
تسمى الميرا من هذا النوع بالميرا ذات المقياسين • وفي الميرات الانفار لـ (Wild) كل تدريج من طرف يبعد بمقدار 55 mm عن تدريج من الطرف الاخر (شكل 5.2.2) ويجب ان يكون فرق القراءتين على كل من المقياسين (55 cm 301) بحدود اخطاء القراءة •

تركيز الميرا شاقوليا بواسطة زئبقية كروية ، وتستخدم حوامل لتأمين ثبات شاقوليتها اثناء القياس ، كما تركز على قواعد خاصة

(تسمى سوكل Socle) (شكل 5.2.4)
تغرس بالارض ، لضمان ثبات الميرا
حين اجراء القياسات •

(5.3) — شبكات التسوية العامة :

ان طريقة التسوية الهندسية الدقيقة ، لا تصلح لتعيين ارتفاعات النقاط الجيوديزية لان هذه النقاط تكون موضوعة بشكل عام على قمم الجبال والتلال ولذلك تُعيّن ارتفاعاتها


(شكل 5.2.4)

بطريقة التسوية غير المباشرة وباد خال تصحيحات كروية الارض وانكسار الاشعة ، بينما تطبق التسوية الهندسية الدقيقة لتعيين ارتفاعات نقاط موضوعة في امكنة سهلة وبشكل عام على طول خطوط المواصلات •

تؤلف هذه النقاط بمجموعها شبكة نسميها بشبكة التسوية العامة للبلاد ، فتؤسس شبكة اساسية اولى من نقاط التسوية ثم شبكة ثانية تستند اليها ثم شبكة ثالثة وهكذا الى ان نتوصل الى تعيين عدد كاف من النقاط ذات الارتفاعات المعلومة والتي تفيد كهيكل اساسي وكمرجع للارتفاعات في المساحة فنطلق منها ونجرى قياسات لارتفاعات النقاط في الاعمال المساحية ثم نسكر على نقاط من الشبكة ، فنتمكن من تحقيق خلو الارتفاعات في المساحة من الاغلاط كما نستطيع تعديل القياسات لزيادة دقة الاعمال •

تجسد نقاط التسوية العامة على الطبيعة وتتبع طريقة السير لتعيين ارتفاعاتها • ان مختلف المضلعات الواصلة بين هذه النقاط تسمى بالشبكة ، ونطلق اسم العقدة على النقطة المشتركة لعدة

مضلعات ، فارتفاع عقدة يكون تابعا للمسار ، وللحصول على ارتفاع وحيد للعقد في شبكة من الضروري ان تخضع القياسات لتعديل ويتم هذا التعديل وفق مبدأ المربعات الصغرى (الفصل السادس) وسنبين في الفصل السابع كيفية اجراء هذا التعديل •

ان الارتفاعات المعينة لنقاط الشبكة هي بالنسبة للمستوى الوسطي للبحار لكل دولة يحدها بحر أى منسوبة الى سطح البحر في حالة السكون دون اعتبار ظاهرة المد والجزر ويسمى هذا السطح بسطح التسوية الصفر •

ويتم تعيينه باجراء قياسات لمعرفة تغيرات مستوى البحر في منطقة ثابتة جيولوجيا وذلك بواسطة جهاز يدعى (راسم المد والجزر Marégraphe) •

(5.4) ـ التنفيذ العملي لعمليات التسوية الدقيقة لشبكة :

ان من شروط التسوية الهندسية الدقيقة اجراء عمليات القياس على طول الخطوط الحديدية وطرق المواصلات وبشكل عام في المناطق السهلة المنبسطة للحصول على دقة في القياسات ، وتلعب طبيعة الارض التي يجرى عليها العمل وبشكل عام ثباتها دورا هاما في دقة التسوية الهندسية •

تجسد نقاط التسوية الرئيسية بدلائل من الحديد ، مثبتة بالصخر أو بالانشاءات الثابتة كالجسور والابنية العامة ، أما بالنسبة لنقاط التسوية الثانوية فتجسد كل منها بدليل او ببرشيم من الحديد يثبت في السطوح المستوية للانشاءات الثابتة أو على الصخور وتكون قمة البرشيم على شكل نصف كرة •

بعد اختيار موقع كل نقطة وتجسيدها ترقم ويعين موقعهـــا الكيلو مترى ويرسم لها كروكي ويوضح مكانها بالنسبة للانشاءات الثابتة والقريبة •

تعين ارتفاعات النقاط الرئيسية بعمليات سير مغلق ، ومجموعـة المضلعات الواصلة بين هذه النقاط تدعى بالشبكة الرئيسية • استنادا الى هذه الشبكة تعين بطريقة السير ايضا نقاط تسوية من الدرجـــة الثانية وهكذا •

لاجراء القياسات بشكل دقيق تجسد ذروات مضلع واصل بيـــن نقطتي تسوية باوتاد من الخشب تثبت جيدا بالارض ويغرس فوق كـــل منها مسمار ذو قمة نصف كروية تركز عليها الميرا أو تستخدم قواعد للميرا تغرس بالارض ، ويجب العمل على تثبيت ذروات المضلع جيدا بالارض لضمان ثبات الميرا عليها اثناء اجراء القياسات •

تستخدم طريقة الرصد المتساوى لاجراء قياسات التسوية أى يوضع جهاز التسوية في منتصف المسافة بين نقطة خلفية ونقطة امامية• اذ بذلك تحذف تأثير كروية الارض وتأثير انكسار الاشعة وخطأ التوجيه الشاقولي (عدم ضبط الزئبقية بالنسبة للمحور الضوئي) • ويمكـــن تحقيق المنتصف بواسطة شريط أو حبل •

من الاخطاء النظامية التي تعترض التسوية الهندسية الدقيقـة هو الخطأ الناتج عن اتجاه السير ومن اسبابه انخفاض التربة تحـت تأثير وزن الميرا المستندة على القاعدة أو الوتد في الفترة الزمنيـــة التي تمضي بين قراءة امامية على هذه الميرا ثم قراءة خلفية عليها •

لذلك يجب اجراء السير باتجاهين فنستخدم طريقة الذهـــاب والاياب بين كل دليلين متتاليين ، فبهذه الطريقة نتمكن من مقارنة

نتائج القياس لكل ضلع من اضلاع السير واكتشاف الاغلاط • فاذا كان الفرق بين الذهاب والاياب مفسرا باخطاء القياسات تعتبر عدئــذ المتوسطة بين الذهاب والاياب كقيمة لفرق الارتفاع المقاس • يمكننا ان نستخدم ايضا طريقة كولسكي (Cholesky) المسماة ايضا بطريقـة السير المضاعف ، وفيها يجرى تعيين فرق الارتفاع بين دليليـــن متتاليين باجراء قياسات حسب سيرين قريبين من بعضهما ، كل سير له ذروات خاصة ويلتقي هذان السيران في كل دليل • تجرى القياسات حسب هذين السيرين وذلك باستخدام اربع ميرات •

هذا ويجب اجراء تحقيقات مستمرة خلال القياسات فجـــرى قراءة على كل مقياس حين استخدام ميرات الانفار ، كما تجرى قراءتيـن حسب الخطين الستاديمترين حين استخدام الميرا العادية ، فيجب ان تكون القراءتان وفق الخطين الستاديمترين متناظرتين بالنســبة للقراءة وفق الخط الوسطي الافقي للمحكم •

نتمكن بطرق التحقيق هذه من الحصول على نتائج دقيقة •

ان حساب فرق الارتفاع المقاس بين دليلين يتم بسهولة باعتبار كافة القياسات وبأخذ المتوسطات لحساب ارتفاع العقد في شبكـة • تخضع الشبكة لتعديل وفق مبدأ المربعات الصغرى وسنشرح طـــرق تعديل الارتفاعات لشبكة تسوية دقيقة في الفصل السابع •

(5.5) ـ دقة التسوية الهندسية الدقيقة :

تميز دقة التسوية الهندسية الدقيقة بالخطأ المتوسط التربيـع لفرق الارتفاع المقاس بين نقطتين البعد بينهما كيلو متر واحد ، ونسميه بالخطأ المتوسط التربيع الكيلو مترى ، يحلل هذا الخطأ الى جزئيـن

الاول عرضي e_a ويتبع قانون التوزيع النظامي لغوص والثاني نظامي e_s وسببه الرئيسي اتجاه السهر • تعتبر بشكل عام القيم التالية لـ e_a و e_s :

	e_a^{mm}	e_s^{mm}
التسوية الدقيقة من الدرجة الاولى	0.4	0.2
التسوية الدقيقة من الدرجة الثانية	0.5	0.2
التسوية الدقيقة من الدرجة الثالثة والرابعة	3.0	1.5

يمكننا ان نبرهن بسهولة ان الخطأ المتوسط التوسيع على فرق الارتفاع بين نقطتين البعد بينهما L يعطى بالعلاقة التالية :

$$E = e_a \sqrt{L} + e_s L \qquad (5 . 5 . 1)$$

ويكون الخطأ الاعظمي أي حد التساهل

$E_{max} = 2.5\ E$

أو

$E_{max} = 3\ E$

الفصــل السادس

تقدير المجاهيل وفق مبدأ المربعات الصغرى

(6.1) ـ تصنيف القياسات :

يمكننا تصنيف القياسات في أربعة زمر :

أ ـ القياسات المباشرة : وهي القياسات التي تجرى مباشرة على العنصر المراد تعيينه ، فنسمي قياسا مباشرا كل تعييـــن لعنصر ما بمقارنته مباشرة مع وحدة للقياس وباجراء قراءة علـــى اجهزة القياس •

ب ـ القياسات غير المباشرة أو بالواسطة : وهي القياسات التـــي تجرى على كمية أو عدة كميات متعلقة بعنصر أو عدة عناصر نريـــد تعيينها ولا نستطيع قياسها قياسا مباشرا لاستحالة ذلك ، مثلا لتعيين احداثيات نقطة بالجملة العامة للبلاد او تعيين نصفي قطرى الاهليلج الارضي ، نلجأ الى قياسات مرتبطة مع المجاهيل بعلاقات ثم نعين حسابيا هذه المجاهيل ، فالمجاهيل تابعة لقياسات ونقول عن المجاهيل اننا سنعينها بالواسطة او بطريقة غير مباشرة •

ج ـ القياسات الشرطية : وهي القياسات التي يجب ان تحقـــق شروطا معينة كنظرية هندسية أو قانون منطقي مثلا يجب ان تكون مجموع زوايا مثلث يساوى 200^{gr} فاذا قسنا الزوايا الثلاث لمثلث فعلى القياسات ان تحقق هذا الشرط ، وهذا الشـــرط موجود بمجرد ذكرنا ان الزوايا الثلاث هي زوايا مثلث •

لدينا هنا اذن شروط أو علاقات تربط بين مجاهيل ستعيـــن

كلها بقياسات ، وهذه الشروط موجودة سواء عينت المجاهيل أم لم تعين الا انه ان تم قياس هذه المجاهيل فيجب اخضاع القياسات لتصحيحات بغية تحقيق الشروط الموجودة • نسمي هذه القياسات بالقياسات الشرطية •

د — القياسات الشرطية المرتبطة بمجاهيل : وهي القياسات التي يجب ان تحقق شروطا معينة وهذه الشروط تحوى على مجاهيل لا يمكن قياسها الا بالواسطة • فلدينا علاقات تضم عددا من المجاهيل بعضها يمكن تعيينه بقياسات والبعض الاخر سيعين من هذه العلاقات أو الشروط واستنادا الى القياسات التي تمت •

مثلا لنفرض اننا سنعين معادلة مستقيم في المستوى ، يتعين المستقيم في المستوى فيما اذا علمنا ميله m عن المحور ox وترتيب نقطة تقاطعه مع المحور oy ولتكن p • ولدينا n نقطة سيمر بها المستقيم ويمكننا قياس احداثيات النقاط ، فلدينا هنا مجاهيل يمكن قياسها وهي احداثيات n نقطة ويجب ان تحقق معادلة المستقيم ولدينا مجهولين هما m و p سيعينان استنادا الى القياسات أى بالواسطة أو بطريقة غير مباشرة •

سنعرف فيما يلي كل زمرة من هذه القياسات بمجموعة من العلاقات الخطية تسمى نموذجا رياضيا وسنحاول بعد ذلك ايجاد نموذج عام يضم الحالات الاربعة السابقة •

(6.2) — النموذج الرياضي للقياسات المباشرة :

لدينا هنا عنصر واحد مجهول β ويمكن تعيينه بقياسات

مباشرة • ان قياسا واحدا لهذا العنصر يكفي لتعيينه الا انه بشكل عام لا نكتفي بقياس واحد بل نجري n قياسا وذلك لتحقيق غرضين اساسيين ، الاول لتحقيق خلو القياسات من الاغلاط واستبعادها حين وجودها ، والثاني هو اختيار من مجموعة القياسات قيمة هي ادق من كل قياس ان تم تقديرها وفق اسس علم الاحصاء والاحتمالات •

لذلك سنفترض انه لتعيين β سنجري n قياسا وسنفرض ان القيم النظرية للقياسات هي $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ • بما ان القياس مباشر فيمكننا ان نكتب المعادلات التالية :

$$\begin{array}{l} \beta = y_1 \\ \beta = y_2 \\ \vdots \\ \beta = y_n \end{array} \qquad (6.2.1)$$

لنحاول كتابة هذه المعادلات بشكل متريسي باستخدام المصفوفات •

لندخل الرموز التالية :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

Y = (شعاع في البعد النوني يمكن قياسه) و $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (مصفوفة الامثال وهي ثابتة)

$\beta = (\beta)$ (مصفوفة تحوى عنصر واحد هو المجهول)

يمكننا عندئذ كتابة جملة العلاقات (6.2.1) على الشكل

$$B\beta = Y \qquad (6.2.3)$$

نقول عن (6.2.3) انه النموذج الرياضي للقياسات المباشرة •

(6.3) ـ النموذج الرياضي للقياسات بالواسطة :

لنعتبر n عنصرا ($y_1 , y_2 , \ldots , y_n$) يمكن تعيينها بقياسات مباشرة ولنعتبر p عنصرا مجهولا ($\beta_1 , \beta_2 , \ldots , \beta_p$) لا يمكن قياسها • ان كل هذه المجاهيل مرتبطة بالمعادلات الخطية التالية :

$$\begin{array}{l} b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \ldots\ldots + b_{1p}\beta_p = y_1 + \ell_1 \\ b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \ldots\ldots + b_{2p}\beta_p = y_2 + \ell_2 \\ \text{-------------------------} \\ b_{n1}\beta_1 + b_{n2}\beta_2 + \ldots\ldots + b_{np}\beta_p = y_n + \ell_n \end{array} \qquad (6.3.1)$$

حيث ($b_{11} , b_{12} , \ldots , b_{np}$) امثال عددية معطاة و ($\ell_1 , \ell_2 , \ldots , \ell_n$) ثوابت معطاة •

لندخل الرموز التالية :

$$B_{(n,p)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix} , \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} , \qquad (6.3.2)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \quad L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

يمكننا عندئذ كتابة جملة المعادلات (6.3.1) على الشكل :

$$B\beta = y + L \qquad (6.3.3)$$

وهو النموذج الرياضي المتريسي للقياسات بالواسطة أو غير المباشرة حيث β هو شعاع المجاهيل غير الممكن قياسها وهو في الفراغ p و y شعاع المجاهيل الممكن قياسها وهو في الفراغ n •

سنفرض ان $n \gg p$ اذ لايمكن تعيين اية قيمة للمجاهيل $\beta_1 , \beta_2 , \dots \beta_p$ اذا كان $p > n$ •

كما سنفرض ان المعادلات (6.3.1) مستقلة وهذا يعود الى اعتبار المصفوفة B بأنها ذات رتبة اعظمية ، وبما ان $n \gg p$ فيجب ان تكون رتبتها p ونكتب :

$$\boxed{r\left(B\right) = p} \qquad (6.3.4)$$

(6.4) ـــ النموذج الرياضي للقياسات الشرطية :

لنعتبر n معادلة خطية بـ m مجهول ($y_1 , y_2 , \dots , y_m$) :

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots\dots + a_{1m} y_m + \ell_1 = 0 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots\dots + a_{2m} y_m + \ell_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots\dots + a_{nm} y_m + \ell_n = 0 \end{array}} \qquad (6.4.1)$$

حيث ($a_{11} , a_{12} , \dots , a_{nm}$) امثال معطاة ($\ell_1 , \ell_2 , \dots , \ell_n$) ثوابت معطاة •

أما ($y_1 , y_2 , \dots , y_m$) فهي مجاهيل يمكن قياسها •

لندخل الرموز المتريسية التالية :

$$\boxed{A_{n \cdot m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix} , L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} \quad (6.4.2)$$

فيمكننا ان نكتب جملة المعادلة (6.4.2) على الشكل :

$$\boxed{AY + L = 0} \qquad (6.4.3)$$

وهو النموذج الرياضي للقياسات الشرطية حيث y شعاع مجهول في الفراغ m ولكن يمكن قياسه •

سنفترض ان $n < m$ اذ لا معنى لاجراء قياسات للمجاهيل ان كانت $n \geqslant m$ فهي تتعين بحل المعادلات •

سنفترض ايضا ان جملة المعادلات الخطية (6.4.1) مستقلة أي ان المصفوفة A ذات رتبة اعظمية وبما ان $n < m$ فيجب ان تكون رتبة A :

$$\boxed{r(A) = n} \qquad (6.4.4)$$

(6.5) — النموذج الرياضي للقياسات الشرطية مع مجاهيل :

لنعتبر m مجهولا يمكن قياسه $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m)$ و p وسيطا مجهولا لايمكن قياسه $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ ، ولنفرض انها مرتبطة ببعضها بـ n معادلة خطية ، أي :

$$\begin{array}{|l|}\hline a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots\ldots + a_{1m} y_m + \ell_1 = b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \ldots\ldots + b_{1p}\beta_p \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots\ldots + a_{2m} y_m + \ell_2 = b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \ldots\ldots + b_{2p}\beta_p \\ ------------------------------ \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots\ldots + a_{nm} y_m + \ell_n = b_{n1}\beta_1 + b_{n2}\beta_2 + \ldots + b_{np}\beta_p \\ \hline \end{array}$$

(6.5.1)

حيث $(a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{nm})$ و $(b_{11}, b_{12}, \ldots\ldots, b_{np})$ امثال معطاة •

و $(\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_n)$ ثوابت معطاة •

بادخال الرموز المترسية (6.3.2) و (6.4.2) يمكننا كتابة جملة هذه المعادلات على الشكل :

$$AY + L = B\beta \qquad (6.5.2)$$

حيث Y شعاع في الفراغ m يمكن قياسه و β شعاع في الفراغ p لايمكن قياسه •

سنفترض ان $p \leqslant n < m$ وان المصفوفتين A و B ذات رتبة أعظمية أى ان المعادلات (6.5.1) مستقلة • فلدينا :

$$r(B) = p \qquad r(A) = n \qquad (6.5.3)$$

ان (6.5.2) يعرف لنا النموذج الرياضي للقياسات الشرطية المرتبطة بمجاهيل •

(6.6) ـ النموذج الرياضي الخطي العام :

نختار كنموذج رياضي خطي عام لكل الاشكال الاربعة السابقة نموذج القياسات الشرطية مع مجاهيل (6.5.2) وسيتبين انه يمكننا استنتاج النماذج الثلاثة الباقية كحالات خاصة •

لنذكر :

$$AY + L = B\beta \qquad (6.5.2)$$

حيث Y شعاع في الفراغ m يمكن قياسه • β شعاع في الفراغ p لايمكن قياسه •

A و B مصفوفتي امثال معطاة $A_{(n,m)}$ و $r(A) = n$

$B_{(n,p)}$ و $r(B) = p$

L شعاع ثابت في الفراغ n

واعتبارا من هذا النموذج نحصل على :

١ ـ نموذج القياسات الشرطية (6.4.3) بوضع :

$$p = 0 \qquad B = 0 \qquad (6.6.1)$$

٢ ـ نموذج القياسات بالواسطة أو غير المباشرة (6.3.3) بوضع

$$m = n \qquad A = I_{(n,n)} \qquad (6.6.2)$$

حيث $I_{(n,n)}$ المصفوفة الاحادية من الدرجة n

٣ ـ نموذج القياسات المباشرة (6.2.3) بوضع

$$m = n , \quad L = 0 , \quad p = 1 , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} , \quad A = I_{(n,n)} \qquad (6.6.3)$$

كما انه يمكننا ان نستنتج نموذج القياسات المباشرة (6.2.3)

من نموذج القياسات بالواسطة بوضع

$$p = 1 , \quad L = 0 , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6.6.4)$$

وبما أننا بينا أن النموذج (6.5.2) عام فيكفي اذن دراسة واستنتاج القوانين الخاصة به لتقدير المجاهيل ثم استخراج الحالات الخاصة لبقية اشكال القياسات وذلك بأخذ بعين الاعتبار الشروط (6.6.1) و (6.6.2) و (6.6.3) •

(6.7) ـ ادخال القياسات ومبدأ المربعات الصغرى :

لنعتبر النموذج الرياضي العام :

$$A\,y + L = B\beta \qquad (6.5.2)$$

نعلم أن y هو شعاع في الفراغ m وهو مجهول ولكن يمكن قياسه أى قياس مركباته • فلنفرض ان قياسات مركبات y هي

($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$) الممثلة بالشعاع X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad (6.7.1)$$

ولنفرض ان هذه القياسات مستقلة ولكنها ليست بنفس الدقة بل ذات أوزان ($g_1, g_2, \ldots\ldots, g_m$) ولنذكر ان وزن قياس يمثل أهميته النسبية بالنسبة لبقية القياسات •

ان القياسات ($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$) تحمل اخطاء عرضية مجهولة • لنرمز لهذه الاخطاء بـ ($v_1, v_2, \ldots\ldots, v_m$) والتي يمكن اعتبارها مركبات شعاع V

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad (6.7.2)$$

فيمكننا ان نكتب :

$$Y = X + V \qquad (6.7.3)$$

أو

$$V = Y - X \qquad (6.7.4)$$

ان المعادلة المترسية (6.5.2) تمثل n معادلة بـ ($m + p$) مجهول ولدينا $m+p>n$ فعدد المجاهيل اكبر من عدد المعادلات . فرياضيا لدينا حلول لانهائية حيث انه لدينا ($m+p - n$) حلا مستقلا أي يمكننا اختيار ($m+p - n$) مجهول • الا ان الشعاع Y قد قيست مركباته أو ان X هو قياس Y • فاذا عوضنا في (6.5.2) Y بـ X نجد :

$$A X + L = B \beta \qquad (6.7.5)$$

وهذه المعادلة المتريسية تمثل n معادلة بـ p مجهول $(\beta_1, \beta_2, ... \beta_p)$ لكن $p \leqslant n$ أى أنه بشكل عام ، عدد المعادلات اكثر من عـــدد المجاهيل ، هذا وقد سبق ان ذكرنا ان القياسات تحمل اخطاء ، ومن هنا نستنتج انه لايمكن ايجاد قيم للشعاع β المجهول بشكل تتحقق فيه كل المعادلات (6.7.5) •

وهنا نتساءل عن الحل الاكثر احتمالا لـ y و β أى بتعبير ادق نتساءل : وفق أى مبدأ يمكننا اختيار شعاع $\hat{y}$ يمثل مقدّرا *estimator* (*estimateur*) للشعاع المجهول y والمعين بالشعاع المقاس X. يجب على الشعاع المقدر $\hat{y}$ ان يحقق المعادلة المتريسية (6.5.2) • لكن ادخال المقدر $\hat{y}$ في (6.5.2) سيؤدى الى تعيين شعاع مقدّر $\hat{\beta}$ للشعاع β •

وعلى هذا الاساس يمكننا ان نكتب (6.7.5) بادخال هذين المقدّرين :

$$\boxed{A \hat{y} + L = B \hat{\beta}} \qquad (6.7.6)$$

وبادخال $\hat{y}$ عوضا عن y في (6.7.4) سنحصل على مقـدّر لشعاع الاخطاء لا على شعاع الاخطاء الحقيقية أى :

$$\boxed{\hat{V} = \hat{y} - X} \qquad (6.7.7)$$

وعلينا الان اتباع مبدأ لتقدير $\hat{y}$ و $\hat{\beta}$ المحققين لـ (6.7.6) يمكننا اتباع الطريقة الاكثر تشابها (*maximum likelihood* *maximum de vraisemblance*) ، لاجراء هذا التقدير وهي طريقة معروفة في علم الاحتمالات والاحصاء والتي نشتق منها مبدأ المربعـات الصغرى • وسنتقبل هنا هذا المبدأ بدون برهان •

ان مبدأ المربعات الصغرى ينص على اختبار المقدّر $\hat{y}$ بشكل يصبح فيه التابع التالي اصغريا :

$$\psi = g_1 \hat{v}_1^2 + g_2 \hat{v}_2^2 + \dots\dots\dots + g_m \hat{v}_m^2 = minimum \qquad (6.7.8)$$

حيث ($\hat{v}_1 , \hat{v}_2 , \dots\dots\dots , \hat{v}_m$) هي مقدرات الاخطاء وهـــي مركبات الشعاع $\hat{V}$.

ان الشكل (6.7.8) هو شكل تربيعي ولوضعه بشكل مترسي لنعرف المصفوفة القطرية للاوزان :

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & g_m \end{pmatrix} \qquad (6.7.9)$$

سنرمز فيما يلي لمنقول مصفوفة بكتابة حرف T فوقها فمثلا C^T يمثل منقول المصفوفة C .

يمكننا كتابة الشكل التربيعي (6.7.8) باستخدام المصفوفات كما يلـــي :

$$\psi = \hat{V}^T G V \qquad (6.7.10)$$

وبادخال (6.7.7) تكتب العلاقة الاخيرة على الشكل :

$$\psi = (\hat{y} - X)^T G (\hat{y} - X) \qquad (6.7.11)$$

نلاحظ ان ψ تابع للشعاع $\hat{y}$ أى تابع لـ m مجهول ($\hat{y}_1 , \hat{y}_2 , \dots\dots , \hat{y}_m$)

(6.8) ــ حساب المقدّرات :

سنحسب الان المقدّرين $\hat{y}$ و $\hat{\beta}$ بتطبيق مبدأ المربعـــات الصغرى أى بطريقة يصبح فيها التابع :

$$\boxed{\psi = (\hat{Y} - X)^T G \ (\hat{Y} - X)} \qquad (6 . 7 . 11)$$

اصغريا على أن يتحقق النموذ ج

$$\boxed{A\hat{Y} + L = B\hat{\beta}} \qquad (6 . 7 . 6)$$

فـ Ψ تابع لـ m مجهول ($\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots\ldots, \hat{y}_m$) ولكن هذ ه المجاهيل غير مستقلة بل عليها تحقيق جملة المعادلات (6 . 7 . 6) فنحن امام نهاية مرتبطة (لاحظ الطحق) ، لذ لك سنستعين بطريقة مضاريب لاكرانج (Lagrange) فنعرف الشعاع :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \qquad (6 . 8 . 1)$$

حيث عد د مركباته n بعدد المعادلات (6.7.6) وهـذ ه الامثال هي مضاريب لاكرانج •

ثم نعتبر التابع :

$$\boxed{\Omega = (\hat{Y} - X)^T G (Y - X) - 2 K^T (A\hat{Y} + L - B\hat{\beta})} \qquad (6.8.2)$$

الذ ى سنجعله اصغريا (راجع الطحق) • ان المجاهيل هي $\hat{Y}$ ، $\hat{\beta}$ ، K ، فلنفاضل Ω بالنسبة لهذ ه المجاهيل • فنجد :

$$d\Omega = d\hat{Y}^T . G(\hat{Y} - X) + (\hat{Y} - X)^T . G . d\hat{Y} - 2 K^T (A . d\hat{Y} - B . d\hat{\beta})$$
$$- 2 \, dK^T . (AY + L - B\hat{\beta})$$

أو

$$d\Omega = d\hat{Y}^T . G(\hat{Y}-X) + (\hat{Y}-X)^T . G . d\hat{Y} - 2K^T . A . d\hat{Y}$$
$$+ 2K^T B . d\hat{\beta} - 2\, dK^T . (A\hat{Y} + L - B . \hat{\beta})$$

(6.8.3)

بما أن $d\Omega$ هو عنصر واحد فان كل حد من الطرف الثاني في (6.8.3) يمثل عنصرا واحدا وهذا ما يمكن تحقيقه بسهولة فيمكننا اذن ان نعوض أى حد من الطرف الثاني بمقلوبه فلدينا :

$$d\hat{Y}^T . G . (\hat{Y}-X) = [d\hat{Y}^T G . (\hat{Y}-X)]^T = (\hat{Y}-X)^T . G . d\hat{Y}$$

(6.8.4)

حيث G هي مصفوفة قطرية (متناظرة) •

بادخال (6.8.4) في (6.8.3) نجد :

$$d\Omega = (\hat{Y}-X)^T . G . d\hat{Y} + (\hat{Y}-X)^T . G d\hat{Y} - 2K^T A . d\hat{Y}$$
$$+ 2K^T . B . d\hat{\beta} - 2\, dK^T . (A\hat{Y} + L - B . \hat{\beta})$$

أو

$$\boxed{\begin{aligned} d\Omega = 2\left[(\hat{Y}-X)^T G - K^T A\right] d\hat{Y} + 2K^T B . d\hat{\beta} \\ - 2\, dK^T (A\hat{Y} + L - B\hat{\beta}) \end{aligned}}$$

(6.8.5)

ونحصل على القيمة الصغرى لـ $d\Omega$ عندما $d\Omega = 0$ مهما كانت قيم التزايدات $dK, d\hat{\beta}, d\hat{Y}$ (راجع الملحق) • أى عندما تنعدم التعابير التالية :

$$(Y - X)^T G - K^T A = 0 \qquad (6.8.6)$$

$$K^T B = 0 \qquad (6.8.7)$$

$$A\hat{Y} + L - B\hat{\beta} = 0 \qquad (6.8.8)$$

يجب ايجاد قيم المقدرين $\hat{Y}$ $\hat{\beta}$ التي تحقق (6.8.6) ، (6.8.7) ، (6.8.8) نلاحظ ان هذه القيم ستحقق العلاقة التربيعية (6.7.6) أي النموذج (6.5.2) اذ ان العلاقة (6.8.8) ليست الا العلاقة (6.7.6) •

بأخذ منقول طرفي العلاقة (6.8.6) نجد :

$$G(\hat{Y}-X) - A^T K = 0$$

أي

$$\hat{Y} - X = G^{-1} A^T K$$

حيث G مصفوفة قطرية نظامية •

ومنه

$$\hat{Y} = X + G^{-1} A^T K \qquad (6.8.9)$$

بادخال (6.8.9) في (6.8.8) نجد :

$$A\left[X + G^{-1}A^T K\right] + L - B\hat{\beta} = 0$$

ومنه

$$(A G^{-1} A^T) K + AX + L - B\hat{\beta} = 0$$

أو

$$\boxed{(A G^{-1} A^T) K = B\hat{\beta} - (AX + L)} \qquad (6.8.10)$$

لنضع

$$\boxed{\mathcal{M} = A G^{-1} A^T} \qquad (6.8.11)$$

نلاحظ ان المصفوفة $\mathcal{M}$ مربعة ودرجتها n اذ :

$$\mathcal{M}_{n,n} = (A)_{n,m} (G)_{m,m} (A^T)_{m,n}$$

ان رتبة $\mathcal{M}$ هي من رتبة A لان G مصفوفة نظامية و $n < m$

وقد سبق ان ذكران رتبة A هي اعظمية أي $r(A) = n$ من هنا

نستنتج ان رتبة M هي n فالمصفوفة M نظامية ٠

نكتب (6.8.10) باستعمال الرمز (6.8.11)

$$MK = B\hat{\beta} - (AX + L)$$

ومنه

$$\boxed{K = M^{-1}[B\hat{\beta} - (AX + L)]} \qquad (6.8.12)$$

لنأخذ الان منقول الطرفين في العلاقة (6.8.7) فنجد :

$$B^T K = 0$$

وبادخال تعبير K من (6.8.12) نجد :

$$B^T[M^{-1}B\hat{\beta} - M^{-1}(AX + L)] = 0$$

أو

$$\boxed{(B^T M^{-1} B)\hat{\beta} = B^T M^{-1}(AX + L)} \qquad (6.8.13)$$

لنضع

$$\boxed{N = B^T M^{-1} B} \qquad (6.8.14)$$

نلاحظ ان N مصفوفة مربعة درجتها p اذ $N_{p,p} = (B^T)_{p,n}(M^{-1})_{n,n}(B)_{n,p}$

ثم ان هذه المصفوفة هي من رتبة المصفوفة B اذ ان M نظامية ولكن سبق ان شرطنا ان رتبة B هي اعظمية أى $r(B) = p$ فرتبة المصفوفة N هي p أى انها نظامية :

تصبح العلاقة (6.8.13) بادخال الرمز (6.8.14) :

$$N\hat{\beta} = B^T M^{-1}(AX + L)$$

ومنه

$$\boxed{\hat{\beta} = N^{-1} B^T M^{-1}(AX + L)} \qquad (6.8.15)$$

من هذه العلاقة نحسب قيمة المقدّر β ٠

لندخل الان تعبير K من (6.8.12) في (6.8.9) فنجد :

$$\hat{Y} = X + G^{-1} A^{T} M^{-1} \left[B\hat{\beta} - (AX + L) \right] \qquad (6.8.16)$$

ان هذه العلاقة تسمح لنا بحساب المقدر $\hat{y}$ بعد ان نكون قد حسبنا $\hat{\beta}$ من (6.8.15)

بادخال تعبير $\hat{\beta}$ في (6.8.16) نجد قانونا يسمح لنا مباشرة بحساب المقدر $\hat{y}$ ، فنجد :

$$\hat{Y} = X + G^{-1} A^{T} M^{-1} \left[B N^{-1} B^{T} M^{-1} (AX + L) - (AX + L) \right]$$

أو

$$Y = X + G^{-1} A^{T} M^{-1} \left[B N^{-1} B^{T} M^{-1} - I_{n,n} \right] (AX + L)$$

(6.8.17)

نلخص هذه القوانين كما يلي :

$$AY + L = B\beta \qquad (6.5.2)$$

نموذج رياضي فيه: $(A)_{n,m}$ (معطاة) $n<m$ و $r(A)=n$

$(B)_{n,p}$ (") $p \leqslant n$ و $r(B)=p$

L شعاع ثابت في الفراغ n (معطى)

Y شعاع في الفراغ m مجهول يمكن قياسه

β شعاع مجهول لايمكن قياسه •

X شعاع في الفراغ m هو قياس الشعاع Y ومركباته مستقلة

$\hat{y}$ ، $\hat{\beta}$ مقدّران للشعاعين Y و β ، معطيان بالقوانين التالية الناتجة عن التقدير وفق مبدأ المربعات الصغرى أي بشكل تصبح فيه

$(\hat{Y}-X)^T G (\hat{Y}-X)$ اصغرية

حيث G مصفوفة الاوزان وتعرف اوزان القياسات • وهي مصفوفة قطرية •

لدينا : (6 . 8 . 15) $\hat{\beta} = N^{-1}B^T M^{-1}(AX + L)$

$$\hat{Y} = X + G^{-1}A^T M^{-1}\left[B\hat{\beta} - (AX + L)\right] \qquad (6.8.16)$$

$$\hat{y} = X + G^{-1}A^T M^{-1}\left[B N^{-1} B^T M^{-1} - I_{n,n}\right](AX + L) \qquad (6.8.17)$$

حيث : $N = B^T M^{-1} B$ (6.8.14) $\qquad M = A G^{-1} A^T$ (6.8.11)

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{g_m} \end{pmatrix}$$

(6 . 8 . 18)

(6.9) ــ حالة القياسات المستقلة وذات نفس الدقة :

اذا كانت القياسات مستقلة وذات نفس الدقة فهذا يعني ان لها نفس الانحراف المعياري أي نفس الخطأ المتوسط التربيعي• تعني هذه الخاصة ان للقياسات اوزانا متساوية ويمكن اعتبار كل وزن مساوي للوحدة •

تتحول عندئذ المصفوفة القطرية للاوزان G الى مصفوفة احادية I أي

$$G = I \qquad (6.9.1)$$

باعتبار هذه الخاصة تصبح العلاقات السابقة :

$$M = A A^T \qquad (6.9.2)$$

$$N = B^T M^{-1} B \qquad (6.9.3)$$

$$\boxed{\hat{\beta} = N^{-1} B^T M^{-1} (A X + L)} \qquad (6.9.4)$$

$$\boxed{\hat{Y} = X + A^T M^{-1} \left[B \hat{\beta} - (A X + L)\right]} \qquad (6.9.5)$$

أو بدون حساب قيمة β من (6.8.17)

$$\boxed{\hat{Y} = X + A^T M^{-1} \left[B N^{-1} B^T M^{-1} - I_{n,n}\right](A X + L)} \qquad (6.9.6)$$

(6.10) ــ حالات خاصة :

سنستنتج الان من مجموعة القوانين (6.8.18) الحالات الخاصة التالية :

أ ــ حالة القياسات الشرطية •

لقد وجدنا ان النموذج الرياضي لها هو

$$\boxed{A Y + L = 0} \qquad (6.4.3)$$

والذى يمكن استنتاجه من النموذج العام (6.5.2) بوضع

$$p = 0 \qquad B = 0 \tag{6.6.1}$$

هنا لا يوجد حساب سوى مقدر واحد $\hat{y}$ يمكن حسابه من
(6.9.6) بأخذ بعين الاعتبار (6.6.1)
فنجد

$$\hat{y} = X - G^{-1}A^{T}M^{-1}(AX + L)$$

وبادخال قيمة M من (6.8.11) نجد

$$\hat{y} = X - G^{-1}A^{T}(A\,G^{-1}A^{T})^{-1}(A\,X + L) \tag{6.10.1}$$

من هذه العلاقة نحسب قيمة $\hat{y}$
وفي حالة القياسات المستقلة المتساوية الدقة أى
$G = I$
نجد

$$\hat{y} = X - A^{T}(A\,A^{T})^{-1}(A\,X + L) \tag{6.10.2}$$

ب ـ حالة القياسات بالواسطة أو غير المباشرة :

لقد وجدنا هنا ان النموذج الرياضي محدد بالعلاقة المتوسمة
التالية :

$$B\beta = y + L \tag{6.3.3}$$

ويمكن الحصول على هذا النموذج اعتبارا من النموذج العام (6.5.2)
بوضع

$$m = n \qquad A = I_{(n,n)} \tag{6.6.2}$$

اذا اخذنا بعين الاعتبار (6.6.2) في العلاقتين :(6.9.4)
و (6.9.5) نجد :

$$\hat{\beta} = N^{-1}B^{T}M^{-1}(X + L) \tag{6.10.3}$$

$$\hat{y} = X + G^{-1}M^{-1}\left[B\hat{\beta} - (X + L)\right] \qquad (6.10.4)$$

ولكن لدينا (6.8.11)

$$M = A\,G^{-1}A^{T}$$

وتصبح باعتبار (6.6.2)

$$M = G^{-1} \qquad (6.10.5)$$

و •

$$M^{-1} = G$$

وعليه نستطيع ان نكتب العلاقة (6.10.4) على الشكل :

$$\hat{y} = X + B\hat{\beta} - X - L$$

أو

$$\boxed{\hat{y} = B\hat{\beta} - L} \qquad (6.10.6)$$

وهذا متوقع اذن ان المقدرين $\hat{\beta}$ $\hat{y}$ يحققان النموذج (6.3.3)

وهذه العلاقة الاخيرة ليست الا (6.3.3) بتعويض المجاهيل بالمقدرات •

ولقد وجدنا ان:(6.8.14)

$$N = B^{T}M^{-1}B$$

وبادخال (6.10.5) نجد

$$N = B^{T}G\,B \qquad (6.10.7)$$

وتصبح (6.10.3) بادخال (6.10.7) و (6.10.5) :

$$\boxed{\hat{\beta} = \left(B^{T}G\,B\right)^{-1}B^{T}G\,(X + L)} \qquad (6.10.8)$$

تعطينا هذه العلاقة قيمة المقدّر $\hat{\beta}$ في حالة القياسات بالواسطة

كما تعطينا العلاقة (6.10.6) قيمة المقدر $\hat{y}$ •

وفي الحالة الخاصة عندما تكون القياسات مستقلة ومتساوية الدقة

أي $G = I$ نجد

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}(X + L) && (6.10.9)\\ \hat{y} &= B\hat{\beta} - L && (6.10.6)\end{aligned}}$$

ج — <u>حالة القياسات المباشرة :</u>

لقد بينا ان النموذج الرياضي لهذه القياسات هو :

$$\boxed{B\beta = y} \qquad (6.2.3)$$

وقد بينا اننا نحصل عليه اعتبارا من النموذج القياسات غير المباشرة بوضع

$$\boxed{p = 1 \qquad L = 0 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad (6.6.4)$$

فـ $\hat{\beta}$ و $\hat{y}$ يمكن حسابها من (6.10.8) و (6.10.6) بادخال هذه الشروط .

نجد بسهولة $B^T G B = g_1 + g_2 + \dots + g_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$

فتكون

$$\boxed{(B^T G B)^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i}} \qquad (6.10.10)$$

لنحسب الان $B^T G X$ لدينا :

$$\boxed{B^T G X = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i} \qquad (6.10.11)$$

وباعتبار $L = 0$ تعطينا (6.10.8) بأخذنا بعين الاعتبار (6.10.10) و (6.10.11) .

$$\boxed{\hat{\beta} = \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}} \qquad (6.10.12)$$

أي ان المقدر في هذه الحالة هي المتوسطة الموزونة .

وتصبح العلاقة (6.10.6) :

$$\boxed{\hat{y} = B\hat{\beta}} \qquad (6.10.12)$$

وفي حالة القياسات المستقلة المتساوية الدقة لدينا

$$g_1 = g_2 = \cdots\cdots = g_n = 1$$

وتصبح العلاقة (6.10.12)

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (6.10.13)$$

أى نحصل على المتوسطة الحسابية كمقدر لـ β •

(6.11) ـ حالة نماذج غير خطية :

لنعتبر n معادلة غير خطية •

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2, \cdots, y_m, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_p) &= 0 \\ f_2(y_1, y_2, \cdots, y_m, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_p) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(y_1, y_2, \cdots, y_m, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_p) &= 0 \end{aligned} \qquad (6.11.1)$$

حيث $p \leqslant n \leqslant m$

و

$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$ وسطاء مجهولة القيمة لايمكن قياسها •

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ شعاع مجهول يمكن قياسه

لنرمز بـ لقياس أى :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ وهي قياسات مستقلة ذات اوزان معرفة بالمصفوفة القطرية G

يمكننا ان نكتب جملة المعادلات على الشكل

$$F\,(Y,\ \beta) = 0 \qquad (6.11.2)$$

وعلينا ايجاد مقديرين $\hat{y}$ $\hat{\beta}$ يحققان (6.11.2) أى

$$F\,(\hat{Y},\ \hat{\beta}) = 0 \qquad (6.11.3)$$

وان يتحقق مبدأ المربعات الصغرى :

$$\Psi = (Y - X)^T\, G\, (Y - X) = minimum \qquad (6.11.4)$$

ان النموذج (6.11.2) غير خطي فلا يمكننا تطبيق القوانين التي وجدناها في الفقرات السابقة ، لذا سنفرض انه لدينا قيمتين تقريبيتين لـ Y ولـ β ولتكن : Y_0 β_0

فيمكننا ان نكتب :

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= Y_0 + d\hat{Y} \\ \hat{\beta} &= \beta_0 + d\hat{\beta} \end{aligned} \qquad (6.11.5)$$

ويكفي تعيين التزايدات $d\hat{Y}$ و $d\beta$

بادخال (6.11.5) في (6.11.4) نجد :

$$\Psi = (Y_0 + d\hat{Y} - X)^T\, G\, (Y_0 + dY - X) = minimum$$
(6.11.6)

وبوضع

$$dX = Y_0 - X \qquad (6.11.7)$$

تصبح العلاقة (6 11 6) :

$$\Psi = (dY - dX)^T G\, (dY - dX) = minimum \qquad (6.11.8)$$

ان (6.11.5) تعني :

$$\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \hat{y}_2\\ \vdots\\ \hat{y}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(y_1)_0\\ (y_2)_0\\ \vdots\\ (y_m)_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d\hat{y}_1\\ d\hat{y}_2\\ \vdots\\ d\hat{y}_m\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \vdots\\ \hat{\beta}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\beta_1)_0\\ (\beta_2)_0\\ \vdots\\ (\beta_p)_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d\hat{\beta}_1\\ d\hat{\beta}_2\\ \vdots\\ d\hat{\beta}_p\end{pmatrix}$$

ويمكننا ان نكتب المعادلات (6.11.1) بادخال التزايدات :

$$f_1\left((y_1)_0+d\hat{y}_1,\ (y_2)_0+d\hat{y}_2,\ \ldots,\ (y_m)_0+d\hat{y}_m,\ (\beta_1)_0+d\hat{\beta}_1,\ (\beta_2)_0+d\hat{\beta}_2,\ \ldots,\ (\beta_p)_0+d\hat{\beta}_p\right)=0$$
$$f_2\left((y_1)_0+d\hat{y}_1,\ (y_2)_0+d\hat{y}_2,\ \ldots,\ (y_m)_0+d\hat{y}_m,\ (\beta_1)_0+d\hat{\beta}_1,\ (\beta_2)_0+d\hat{\beta}_2,\ \ldots,\ (\beta_p)_0+d\hat{\beta}_p\right)=0$$

$$f_n\left((y_1)_0+d\hat{y}_1,\ (y_2)_0+d\hat{y}_2,\ \ldots,\ (y_m)_0+d\hat{y}_m,\ (\beta_1)_0+d\hat{\beta}_1,\ (\beta_2)_0+d\hat{\beta}_2,\ \ldots,\ (\beta_p)_0+d\hat{\beta}_p\right)=0$$

(6.11.9)

ويمكننا كتابتها بالشكل المختصر :

$$f_1(Y_0+d\hat{Y},\ \beta_0+d\hat{\beta})=0$$
$$f_2(Y_0+d\hat{Y},\ \beta_0+d\hat{\beta})=0 \qquad (6.11.10)$$

$$f_n(Y_0+d\hat{Y},\ \beta_0+d\hat{\beta})=0$$

أو أيضا :

$$F(Y_0+d\hat{Y},\ \beta_0+d\hat{\beta})=0 \qquad (6.11.11)$$

اذا افترضنا ان التوابع (6.11.9) قابلة للاشتقاق بشكل مستمر في مجال يحوي $\hat{Y}$ و Y_0 و $\hat{\beta}$ و β_0 . لننشر التوابع (6.11.9) حسب تايلور قرب القيم Y_0 β_0 فلدينا بالنسبة لتابع ما f_i باعتبار ان التزايدات لا متناهيات في الصغر من الدرجة الاولى وباهمال اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية :

$$f_i\left((y_1)_0, (y_2)_0, \ldots (y_m)_0, (\beta_1)_0, (\beta_2)_0, \ldots, (\beta_p)_0\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_0 d\hat{y}_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_2}\right)_0 d\hat{y}_2 + \ldots$$

$$+ \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_0 d\hat{y}_m + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_1}\right)_0 d\hat{\beta}_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_2}\right)_0 d\hat{\beta}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_p}\right)_0 d\hat{\beta}_p = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.11.12)$$

ويمكننا كتابتها على الشكل :

$$f_i\left(Y_0, \beta_0\right) + \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_2}\right)_0 \quad \cdots\cdots \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_m}\right)_0\right) d\hat{Y}$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_1}\right)_0 \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_2}\right)_0 \quad \cdots\cdots \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \beta_p}\right)_0\right) d\hat{\beta} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (6.11.13)$$

نلاحظ بسهولة انه بالنسبة لكافة المعادلات أى بالنسبة لـ $i = 1, 2, \ldots, n$ نستطيع ان نكتب من (6.11.13) :

$$\boxed{F\left(Y_0, \beta_0\right) + F'_Y\left(Y_0, \beta_0\right) d\hat{Y} + F'_\beta\left(Y_0, \beta_0\right) d\hat{\beta} = 0}$$

(6.11.14)

حيث

$$F'_Y\left(Y_0, \beta_0\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_m}\right)_0 \\ \hline \left(\frac{\partial f_n}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial y_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial y_m}\right)_0 \end{pmatrix} \qquad (6.11.15)$$

وهي عبارة عن مصفوفة درجتها (n, m) ونسميها بالمصفوفة اليعقوبية لـ $f_1 \, f_2 \ldots f_n$ بالنسبة للمتحولات ($y_1, y_2, \ldots y_m$) •

وكذلك :

$$F'_{\beta}(Y_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta_p}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_p}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial \beta_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial \beta_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial \beta_p}\right)_0 \end{pmatrix} \quad (6.11.16)$$

وهي عبارة عن مصفوفة درجتها (n, p) ونسميها بالمصفوفة اليعقوبية للتوابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بالنسبة للمتحولات $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$

وكذلك :

$$F(Y_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} f_1(Y_0, \beta_0) \\ f_2(Y_0, \beta_0) \\ \vdots \\ f_n(Y_0, \beta_0) \end{pmatrix} \quad (6.11.17)$$

وهي عبارة عن شعاع في الفراغ n .

ان المصفوفات (6.11.15) و (6.11.16) و (6.11.17) هي مصفوفات عددية أي يمكن حساب كل عناصرها اذ يجب بعد الاشتقاق تعويض المجاهيل بالقيم التقريبية Y_0 ، β_0 .

نضع الان :

$$\begin{aligned} F'_Y(Y_0, \beta_0) &= A_{(n,m)} \\ F'_{\beta}(Y_0, \beta_0) &= B_{(n,p)} \\ F(Y_0, \beta_0) &= L_{(n,1)} \end{aligned} \quad (6.11.18)$$

نستطيع كتابة (6.11.14) على الشكل :

$$A\,d\hat{Y} - B\,d\hat{\beta} + L = 0$$

أو

$$A\,d\hat{Y} + L = B\,d\hat{\beta} \qquad (6.11.19)$$

وهكذا نلاحظ اننا حصلنا على علاقة متريسية خطية للمقدرين $d\hat{Y}$ و $d\beta$.

وعلينا كما هو مذكور اعلاه ان نجد قيمة المقدّرين بشكل تتحقق فيه هذه العلاقة ومبدأ المربعات الصغرى أى :

$$\psi = (d\hat{Y} - dX)^T\, G\, (d\hat{Y} - dX) = minimum \qquad (6.11.8)$$

حيث: $(6.11.7)$

$$dX = Y_o - X$$

نلاحظ اننا نستطيع ان نستخدم نفس القوانين (6.8.18) على ان نعوض فيها β بـ $d\beta$ و Y بـ dY و X بـ dX فنجد

$$d\hat{\beta} = N^{-1} B^T M^{-1} (A\,dX + L) \qquad (6.11.20)$$

$$d\hat{Y} = dX + G^{-1} A^T M^{-1} \left[B\,d\hat{\beta} - (A\,dX + L)\right] \qquad (6.11.21)$$

حيث (6.8.11)

$$M = A\,G^{-1} A^T$$

(6.8.14)

$$N = B^T M^{-1} B$$

ان العلاقتين (6.11.20) و (6.11.21) تسمحان لنا بحساب $d\hat{\beta}$ و $d\hat{Y}$ والعلاقتين :

$$\hat{\beta} = \beta_o + d\hat{\beta}$$
$$\hat{Y} = Y_o + d\hat{Y} \qquad (6.11.5)$$

تعطيان قيمة المقدّرين $\hat{\beta}$ و $\hat{Y}$

لكننا في نشر تايلور (6.11.12) اهملنا اللامتناهيات في الصغر في الدرجة الثانية فالقيم $\hat{Y}$ و $\hat{\beta}$ التي سنحصل عليها سوف تكون تقريبيتين وعلينا اعتبارها قيما تقريبية للمقدّرين عوضا عن Y_0 و β_0 ثم علينا ان نحسب من جديد $d\hat{\beta}$ و $d\hat{Y}$ وذلك بعد حساب عناصر المصفوفات (6.11.5) و (6.11.6) و (6.11.7) من أجل القيم التقريبية الجديدة • تعطينا بعد ذلك (6.11.5) قيما ثانية للمقدّرين وهكذا أو بالتقريب المتتالي الى ان تتحقق المتراجحات•

$$\left| \hat{Y}_{k+1} - \hat{Y}_k \right| \leq \delta_1$$

$$\left| \hat{\beta}_{k+1} - \hat{\beta}_k \right| \leq \delta_2 \qquad (6.11.22)$$

حيث δ_1 شعاع في الفراغ m مركباته موجبة اختيارية حسب الدقة المطلوبة •

و δ_2 شعاع في الفراغ p مركباته موجبة اختيارية حسب الدقة المطلوبة و $\hat{\beta}_k$ و $\hat{Y}_k$ هي المقدّران اللذان نحصل عليهما بعد k عملية تقريب متتالي •

ملاحظة : من الواضح اننا نستطيع ان نعتبر كقيمة تقريبية اولى لـ Y القياسات X أي نأخذ $Y_0 = X$

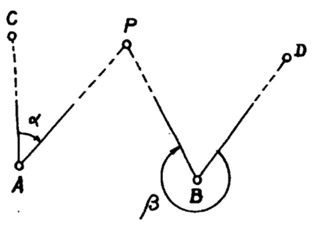
اما القيمة التقريبية الاولى β_0 ، فحسب طبيعة المسألة يمكن ايجاد مركباتها اما تخطيطيا أو بحل p معادلة بعد اعتبار قيم لـ Y في هذه المعادلات القياسات X •

الفصل السابع
تطبيقات لمبدأ المربعات الصغرى

(7 . 1) — تعديل التقاطع والتقويم

لنذكر اولا بطريقة التقاطع وطريقة التقويم •

١ — طريقة التقاطع • لتكن P نقطة مجهولة و A و B نقطتين معلومتين معرفتين باحداثياتهما ومن هاتين النقطتين يمكننا رؤية النقطة P • يمكننا تعيين النقطة P بقياسات زاوية فقط اذا عينا الاتجاهين الافقيين AP و BP ولذلك نقيس الزاويتين الافقيتين الزاوية α: بين الاتجاه AP والاتجاه AC حيث C نقطة معلومة (معروفة باحداثياتها) مرئية من A • والزاوية β : بين الاتجاه BP والاتجاه BD حيث D نقطة معلومة (معروفة باحداثياتها)•



(شكل 7.1.1)

ان هذه القياسات واحداثيات النقاط المعروفة تسمح لنا بحساب (X_p Y_p) احداثيات النقطة P أى تصبح النقطة P معلومة وتتعين تعينا وحيدا •

هذا وان كانت A مرئية من B وبالعكس فاننا نستطيع تعيين P اذا قسنا الزاوية بين الاتجاه AP و AB والزاوية بين الاتجاه BP و BA •

يمكننا تحقيق المعطيات والقياسات باجراء تقاطع لـ P من نقطة معروفة ثالثة E وبتعيين الاتجاه EP أى بقياس زاوية افقية γ تسمي طريقة التقاطع بطريقة تعيين نقطة بخطوط رصد خارجية •

٢ — طريقة التقويم • لتكن P نقطة مجهولة و (A, B, C) نقاط ذات احداثيات معلومة • لنفرض انها مرئية من النقطة P نستطيع ان نعين النقطة P وبالتالي يمكننا حساب احداثياتها اذا قسنا الزاويتين الافقيتين ($A\hat{P}B = \alpha$) و ($B\hat{P}C = \beta$) • بالحقيقة لنعتبر النقاط A,B,C على المخطط (شكل 7.1.2) (باعتبار ان احداثياتها معطاة) • ان المحل الهندسي للنقاط التي ترى فيها خط مستقيم ضمن زاوية ثابتة هو قوس دائرة نسميه بالقوس المحدد للزاوية • فالنقطة P تقع من جهة على القوس المحدد للزاوية α وهو المحل الهندسي للنقاط التي ترى منها القطعة AB • ومن جهة ثانية على القوس المحدد للزاوية β الذى هو المحل الهندسي للنقاط التي ترى منها القطعة BC • ان هذين القوسين يتقاطعان في النقطة B وفي النقطة P. يمكننا ان ننشىء بطريقة هندسية من المعطيات النقطة P • وبالتالي نستطيع حساب احداثياتها •

(شكل 7.1.2)

ان حساب الاحداثيات يتم باحدى الطرق المعروفة (غوص كاسيني ••• الخ) •

تسمي هذه الطريقة بالتقويم أو بطريقة تعيين نقطة بخطوط رصـــد داخلية) •

نلاحظ انه في طريقة التقاطع والتقويم نعتمد فقط على قياسات زاوية • ونلاحظ انه يلزمنا في حالة التقاطع اتجاهان لتعيين النقطة P تعينا وحيدا ويلزمنا ثلاثة اتجاهات في حالة التقاطع لتعييـــن النقطة P تعينا وحيدا (على ان لا تكون النقاط A,B,C,P واقعة على دائرة) •

ان الفرق بين طريقة التقاطع والتقويم هو انه في الطريقـــة الاولى نركز جهاز المساحة في النقاط المعلومة ونرصد النقاط المجهولة بتعيين الاتجاهات نحوها بينما في الطريقة الثانية نركز جهاز المساحة في النقطة المجهولة ونوجهه نحو النقاط المعلومة ونقيس زوايا افقية •

نستطيع في طريقة التقاطع ان نحسب من القياسات الســـموت الاعتبارية للاتجاهات المعينة نحو P •

فمثلا نستطيع حساب السمت G_{AP} :

$$G_{AP} = G_{CA} + \alpha - 200^{gr} \quad (7.1.1)$$

(لاحظ الشكل 7.1.3)

حيث G_{CA} هو السمت الاعتباري للضلع المعلوم CA ويحسب اعتبارا من احداثيات النقطتين A و C :

$$tg\ G_{CA} = \frac{X_A - X_C}{Y_A - Y_C}$$

(شكل 7.1.3)

تعتبر احداثيات النقاط المعطاة صحيحة وبالتالي يمكن اعتبار السمت G_{CA} صحيحا ونستنتج من (7.1.1) ان دقة G_{AP} هو من

دقة α • لذلك نقول عن السمت G_{AP} انه سمت مقاس، ونلاحظ بسهولة اننا لا نستطيع حساب السموت الاعتبارية للاتجاهات في حالة التقويم •

لنفرض الان ان لدينا عددا من نقاط التثليث المعروفة باحداثياتها العمودية ونريد تعيين نقطة تثليث جديدة بطريقة التقاطع أو التقويم أو التقاطع والتقويم معا ، وذلك استنادا الى نقاط معروفة ومرئية من هذه النقطة ، وكما بينا اعلاه ان هذه الطرق لا تتطلب سوى قياس اتجاهات افقية من نقاط معلومة نحو النقطة المراد تعيينها (التقاطع) أو من النقطة المراد تعيينها نحو نقاط معلومة (التقويم) •

لتعيين نقطة تثليث بهذه الطرق لا نكتفي بقياسات كافية لحساب احداثيات النقطة بل نقوم باجراء قياسات فائضة تضمن لنا من جهة تحقيقا للقياسات نفسها وتسمح لنا من جهة ثانية باجراء عملية تعديل بغية الحصول على نتائج دقيقة • ففي التقاطع نعين النقطة بثلاثة اتجاهات من ثلاث نقاط معلومة على الاقل ، وفي التقويم نرصد على الاقل اربع نقاط معلومة •

لنفرض ان نقطة تثليث قد عينت بـ n خط رصد خارجي و n' خط رصد داخلي ، فاذا افترضنا ($n' = 0$) تصبح النقطة معينة فقط بعملية تقاطع ، وعندئذ يجب ان يكون لدينا ($n \geqslant 3$) للحصول على قياسات فائضة ، أما اذا افترضنا ($n = 0$) و($n' \geqslant 4$) فعندئذ تكون النقطة معينة بالتقويم بقياسات فائضة •

سنعتبر فيما يلي الحالة العامة أي أن النقطة معينة بالتقاطع والتقويم معا أي $n \neq 0$ و $n' \neq 0$ ويمكننا ستنتاج ، كحالات خاصة حالة التقاطع وحالة التقويم •

يمكننا حساب احداثيات موقتة (x_o , y_o) للنقطة P المعينة بالتقاطع والتقويم • يمكن حساب هذه الاحداثيات سواء بعملية تقاطع باتجاهين من الاتجاهات المقاسة أو بعملية تقويم على ثلاث نقاط معلومة •

لحساب (x_o , y_o) لم نستخدم كافة القياسات وعلينا الان تعديلها للحصول على احداثيات نهائية بأخذ كافة القياسات بعين الاعتبار • وسنستعرض هنا طريقة التعديل هذه حسب مبدأ المربعات الصغرى المشروح في الفصل السابق •

لنضع :

$$x = x_o + dx$$
$$y = y_o + dy \qquad (7.1.2)$$

حيث dx و dy هي تصحيحات يجب اضافتها جبريا على القيم الموقتة للحصول على القيم النهائية النظرية •

لنفتش الان عن النموذج الرياضي الذى يربط dx و dy

لتكن P_o النقطة الممثلة للاحداثيات التقريبية (x_o , y_o) و P النقطة النظرية ذات الاحداثيات (x , y) و P_α (x_α , y_α) نقطة معلومة رصدنا فيها النقطة P (في حالة التقاطع) أو رصدناها من النقطة P (في حالة التقويم) (شكل 7.1.4) بما أن النقطتين P_α و P_o ذات احداثيات معلومة فنستطيع ان نحسب من هذه الاحداثيات السمت الاعتباري لـ $P_\alpha P_o$ • ليكن هذا السمت $(\gamma)_o$ الذى نسميه بالسمت الاعتباري المحسوب

(شكل 7.1.4)

ان الفرق بين هذا السمت والسمت الاعتباري لِ $P\ P_\alpha$
ممثل بالزاوية ($P_o \hat{P}_\alpha P = d\gamma$).ان المسافة $P_o Q$ تمثل dx
كما ان المسافة PQ هي dy •

ليكن R مسقط العمود النازل من P_o على المستقيم $P_\alpha P$ •
لمسقط المضلع $PR\ P_oQ$ على P_oR فيمكننا ان نكتب :

$$P_oR = dx\ \cos\left((\gamma)_o + d\gamma\right) - dy\ \sin\left((\gamma)_o + d\gamma\right)$$

ومنه وباعتبار $d\gamma$ لا متناهيا في الصغر من الدرجة الاولى وباهمال اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية :

$$P_oR = \cos(\gamma)_o\ dx - \sin(\gamma)_o\ dy - \left[\sin(\gamma)_o\ d\gamma\ dx + \cos(\gamma)_o\ d\gamma\ dy\right]$$

وباهمال الحدود بين القوسين على اعتبار انها لا متناهيات في الصغر من الدرجة الثانية تصبح العلاقة الاخيرة :

$$P_oR = \cos(\gamma)_o\ dx - \sin(\gamma)_o\ dy \qquad (7.1.3)$$

ولكن لدينا :

$$P_oR = P_oP_\alpha\ \sin d\gamma = P_oP_\alpha\ .\ d\gamma = D.\ d\gamma$$

ومنه تصبح

$$dG = \frac{\cos(\gamma)_o}{D}\ dx - \frac{\sin(\gamma)_o}{D}\ dy \qquad (7.1.3)$$

أو

$$\boxed{d\gamma^{cc} = a\,dx + b\,dy} \qquad (7.1.4)$$

حيث

$$\boxed{a = \rho^{cc}\frac{\cos(\gamma)_o}{D} \quad , \quad b = -\rho^{cc}\frac{\sin(\gamma)_o}{D}} \qquad (7.1.5)$$

نلاحظ ان العلاقة (7 . 1 . 4) تربط بين تغير السمت الاعتباري وتغيرات الاحداثيات للنقطة P •

وهكذا فلكل اتجاه مرصود يمكننا كتابة معادلة من الشكل (7 . 1 . 4)

ولجد :

أ) حالة خطوط رصد خارجية :

باعتبار n خط رصد خارجي لندخل الرموز التالية :

١ — $(\gamma_1)_0 , (\gamma_2)_0 \cdots\cdots (\gamma_n)_0$: السموت الاعتبارية المحسوبة لخطوط الرصد •
تحسب هذه السموت استنادا الى احداثيات النقاط المعلومة واحداثيات النقطة التقريبية P_0 •

٢ — $\gamma_1 , \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_n$: السموت الاعتبارية النظرية لخطوط الرصد وهي مجهولة ولكن يمكن قياسها

٣ — $\alpha_1 , \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$: السموت الاعتبارية المقاسة لخطوط الرصد أي قياسات العناصر $\gamma_1 , \gamma_2 \cdots \gamma_n$
وهذه القياسات بالطبع مستقلة •

٤ — $g_1 , g_2 \cdots\cdots g_n$: أوزان القياسات •

٥ — $d\gamma_1 , d\gamma_2 \cdots\cdots d\gamma_n$: التزايدات المجهولة وهي الفروقات بين السموت النظرية والسموت المحسوبة أي بين γ_i و $(\gamma_i)_0$

لنذكر انه قد بينا اننا في حالة خطوط الرصد الخارجية (التقاطع) يمكننا اعتبار اننا قسنا فورا السموت الاعتبارية اذ يمكن حسابها بسهولة اعتبارا من القراءات للزوايا الافقية واستنادا الى احداثيات النقاط المعلومة المعتبرة صحيحة (وقد بيّنا كيفية هذا الحساب في العلاقة (7 . 1 . 1) • ان هذه السموت تحمل نفس اخطاء القياسات •

يمكننا ان نكتب :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\gamma_1)_0 + d\gamma_1 \\ \gamma_2 &= (\gamma_2)_0 + d\gamma_2 \\ &\vdots \\ \gamma_n &= (\gamma_n)_0 + d\gamma_n \end{aligned} \qquad (7.1.6)$$

ولكن قيمة $d\gamma_i$ يمكن التعبير عنها بدلالة تغيرات الاحداثيات dx و dy وفق العلاقة (7.1.4) وبادخال قيم هذه التزايدات وفق (7.1.4) نكتب جملة العلاقات (7.1.6) على الشكل :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_1\,dx + b_1\,dy + (\gamma_1)_0 \\ \gamma_2 &= a_2\,dx + b_2\,dy + (\gamma_2)_0 \\ &\text{-------------------} \\ \gamma_n &= a_n\,dx + b_n\,dy + (\gamma_n)_0 \end{aligned} \qquad (7.1.7)$$

واعتمادا على (7.1.5) لدينا :

$$a_i = \rho^{cc}\frac{\cos(\gamma_i)_0}{D_i} \qquad b = -\rho^{cc}\frac{\sin(\gamma_i)_0}{D_i} \qquad (7.1.8)$$

$$i = 1, 2, \dots\dots\dots, n$$

حيث $(\gamma_i)_0$ هو السمت المحسوب لاتجاه الرصد i و D_i المسافة المحسوبة من الاحداثيات للنقطة P_0 والنقطة المعلومة P_i

لندخل الرموز التالية :

$$\Gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix}(\gamma_1)_0\\ (\gamma_2)_0\\ \vdots\\ (\gamma_n)_0\end{pmatrix} \quad \underset{(n,2)}{B} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ \vdots & \vdots\\ a_n & b_n\end{pmatrix} \quad dX = \begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix} \qquad (7.1.8)$$

فيمكننا كتابة مجموعة المعادلات (7.1.7) على الشكل :

$$\boxed{\Gamma = B\,dX + \Gamma_0} \qquad (7.1.9)$$

ان Γ شعاع مجهول يمكن قياسه وقياساته هي مركبات الشعاع :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (7.1.10)$$

وهذه القياسات مستقلة وذات اوزان $g_1, g_2, \dots, g_n$ تعرف بالمصفوفة القطرية G •

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \qquad (7.1.11)$$

أما dX فهو شعاع مجهول لا يمكن قياسه و B مصفوفة عددية يمكن حساب عناصرها بمجرد ان نفترض قيمة تقريبية للاحداثيات أي نفترض نقطة تقريبية P_0 • ان الرتبة العظمى لـ B هي 2 • أما Γ_0 فهو شعاع معلوم أي يمكن حسابه طالما ان الاحداثيات P_0 معلومة •

نلاحظ بمقارنة النموذج (7.1.9) مع النموذج (6.3.3) انه لدينا هنا نموذج للقياسات غير المباشرة • ان المقدرين $d\hat{X}$، $\hat{\gamma}$ يعطيان اذن بالقوانين (6.10.8) و (6.10.6) (وفق المربعات الصغرى) فنجد بادخال الرموز المذكورة اعلاه في هذين القانونين :

$$d\hat{X} = (B^T G B)^{-1} B^T G (\alpha - \Gamma_0) \qquad (7.1.12)$$

$$\hat{\Gamma} = B\,d\hat{X} + \Gamma_0 \qquad (7.1.13)$$

ومن هاتين العلاقتين نستطيع حساب المقدرين $d\hat{X}$ ، $\hat{P}$ وتكون الاحداثيات المعدلة $\hat{x}$ ، $\hat{y}$ للنقطة P :

$$\hat{x} = x_o + d\hat{x}$$
$$\hat{y} = y_o + d\hat{y} \qquad (7.1.14)$$

وذلك استنادا الى (7.1.2) حيث

$$d\hat{X} = \begin{matrix} d\hat{x} \\ d\hat{y} \end{matrix} \qquad (7.1.15)$$

ب) حالة خطوط الرصد الداخلية :

لدينا n' خط رصد داخلي ، لندخل الرموز التالية :

١ — $(\gamma'_1)_o , (\gamma'_2)_o , \ldots\ldots , (\gamma'_{n'})_o$ السموت الاعتبارية المحسوبة لخطوط الرصد وتحسب استنادا الى احداثيات النقاط المعلومة واحداثيات النقطة التقريبية P_o .

٢ — $\gamma'_1 , \gamma'_2 , \ldots\ldots , \gamma'_{n'}$ السموت الاعتبارية النظرية وهي مجهولة ولا يمكن قياسها في حالة خطوط الرصد الداخلية (التقويم)

٣ — $r'_1 , r'_2 , \ldots\ldots , r'_{n'}$ القياسات الافقية وفق خطوط الرصد الداخلية أى القراءات النهائية وفق اتجاهات الرصد الداخلية (الزوايا الافقية) .

٤ — $s'_1 , s'_2 , \ldots\ldots , s'_{n'}$ القراءات النظرية للاتجاهات ان قياسات $(s'_1 , s'_2 , \ldots\ldots , s'_{n'})$ هي $(r'_1 , r'_2 , \ldots\ldots , r'_{n'})$.

٥ — $g_1, g_2, \ldots\ldots, g_{n'}$ اوزان القياسات •

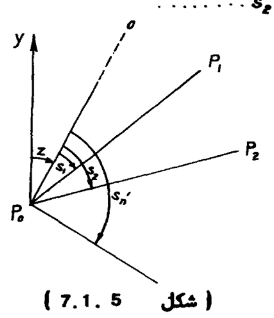
٦ — $d\gamma_1, d\gamma_2, \ldots\ldots, d\gamma_{n'}$ التزايدات المجهولة وهي الفروقات بين السموت النظرية والسموت المقاسة •

لنعرف الان مجهولا جديدا z نسميه بمجهول التوجيه ويعرف لنا السمت الاعتباري لاتجاه الصفر في المقسّم •

ان s'_1 هي الزاوية التي يصنعها الاتجاه $P_0 P_1$ مع صفر المقسّم وقياسها هو r'_1 وكذلك s'_2 ....

(شكل 7.1.5)

فيمكننا ان نكتب :



(شكل 7.1.5)

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= z + s'_1 \\ \gamma'_2 &= z + s'_2 \\ &\vdots \\ \gamma'_{n'} &= z + s'_{n'} \end{aligned} \qquad (7.1.16)$$

ولكن لدينا ايضا :

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= (\gamma'_1)_0 + d\gamma'_1 \\ \gamma'_2 &= (\gamma'_2)_0 + d\gamma'_2 \\ &\vdots \\ \gamma'_{n'} &= (\gamma'_{n'})_0 + d\gamma'_n \end{aligned} \qquad (7.1.17)$$

بكتابة تساوي العلاقات (7.1.16) و (7.1.17) نجد •

$$\boxed{\begin{aligned} s'_1 &= -z + d\gamma'_1 + (\gamma'_1)_0 \\ s'_2 &= -z + d\gamma'_2 + (\gamma'_2)_0 \\ \\ s'_n &= -z + d\gamma'_{n'} + (\gamma'_{n'})_0 \end{aligned}} \qquad (7.1.18)$$

ولكن من (7.1.4) لدينا :

(7.1.19)

$$d\gamma_i'' = a_i' \, dx + b_i' \, dy$$

حيث :

(7.1.20)

$$a_i' = \rho'' \frac{\cos(\gamma_i')_0}{D_i'} \quad , \quad b_i' = -\rho'' \frac{\sin(\gamma_i')_0}{D_i'}$$

$$i = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n'$$

وذلك اعتمادا على (7.1.5)

ان الامثال (7.1.20) يمكن حسابها طالما ان احداثيات النقطة معلومة واحداثيات النقطة المرصودة معلومة •

بادخال (7.1.19) في (7.1.18) نجد :

(7.1.21)

$$\begin{aligned} s_1' &= -z + a_1' \, dx + b_1' \, dy + (\gamma_1')_0 \\ s_2' &= -z + a_2' \, dx + b_2' \, dy + (\gamma_2')_0 \\ &\vdots \\ s_{n'}' &= -z + a_{n'}' \, dx + b_{n'}' \, dy + (\gamma_{n'}')_0 \end{aligned}$$

لنضع

(7.1.22)

$$z = z_0 + dt$$

حيث z_0 قيمة تقريبية سنبين كيفية حسابها •

ونكتب المعادلات (7.1.21) :

(7.1.23)

$$\begin{aligned} s_1' &= -dz + a_1' \, dx + b_1' \, dy + (\gamma_1')_0 - z_0 \\ s_2' &= -dz + a_2' \, dx + b_1' \, dy + (\gamma_2')_0 - z_0 \\ &\vdots \quad - - - - - - - \\ s_{n'}' &= -dz + a_{n'}' \, dx + b_{n'}' \, dy + (\gamma_{n'}')_0 - z_0 \end{aligned}$$

لندخل الرموز التالية :

$$S = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n'} \end{pmatrix} \qquad S_o = \begin{pmatrix} (\gamma'_1)_o - z_o \\ (\gamma'_2)_o - z_o \\ \vdots \\ (\gamma'_{n'})_o - z_o \end{pmatrix}$$

$$C_{n',3} = \begin{pmatrix} -1 & a'_1 & b'_1 \\ -1 & a'_2 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & a'_{n'} & b'_{n'} \end{pmatrix} \qquad dY = \begin{pmatrix} dz \\ dx \\ dy \end{pmatrix}$$

(7.1.24)

ويمكننا كتابة (7.1.23) على الشكل :

$$\boxed{S = C\,dY + S_o} \qquad (7.1.25)$$

ان S هو شعاع مجهول يمكن قياسه وقياساته هي مركبات الشعاع :

$$R = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_{n'} \end{pmatrix} \qquad (7.1.26)$$

وهذه القياسات مستقلة وذات اوزان $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n'}$ نعرفهـــا بالمصفوفة القطرية

$$G' = \begin{pmatrix} g'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g'_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \qquad (7.1.27)$$

أما dY فهو شعاع مجهول لايمكن قياسه و C مصفوفة عددية يمكن حساب عناصرها وكذلك الشعاع S_o .

بمقارنة النموذج الرياضي (7.1.25) مع (6.3.3) نجد انه لدينا نموذج للقياسات غير المباشرة أو بالواسطة . ان المقدرين $d\hat{Y}$ $\hat{S}$ يعطيان بالقانونين (6.10.8) و (6.10.6) وذلـك

باعتماد التقدير وفق مبدأ المربعات الصغرى .

نجد بادخال الرموز اعلاه في القانونين المذكورين :

$$d\hat{Y} = (C^T G' C)^{-1} C^T G (R - S_o) \qquad (7.1.28)$$

$$\hat{S} = C\, d\hat{Y} + S_o \qquad (7.1.29)$$

من هاتين العلاقتين نستطيع حساب المقدّرين

وكون الاحداثيات المعدلة $\hat{x}, \hat{y}$ ومجهول التوجيه المعدل $\hat{z}$

للنقطة P :

$$\hat{x} = x_o + d\hat{x}$$
$$\hat{y} = y_o + d\hat{y}$$
$$\hat{z} = z_o + d\hat{z}$$

حيث

$$d\hat{Y} = \begin{pmatrix} d\hat{z} \\ d\hat{x} \\ d\hat{y} \end{pmatrix} \qquad (7.1.30)$$

يمكننا حساب قيمة تقريبية z_o من المعادلة الاولى ل(7.1.23)

بادخال r_i' عوضا s_i' وبجعل $dx = dy = 0$ فنحصل على :

$$z_o = r_i' - (\gamma_i')_o \qquad (7.1.31)$$

ج ــ حالة خطوط رصد خارجية وداخلية (تقاطع وتقويم معا) :

سنفترض اننا هنا نقطة بـ n خط رصد خارجي و n' خط رصد داخلي . فنستطيع ان نكتب المعادلات (7.1.7) و(7.1.23)

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= a_1\, dx + b_1\, dy + (\gamma_1)_o \\
\gamma_2 &= a_2\, dx + b_2\, dy + (\gamma_2)_o \\
&\vdots \\
\gamma_n &= a_n\, dx + b_n\, dy + (\gamma_n)_o \\
s'_1 &= -dz + a'_1\, dx + b'_1\, dy + \left[(\gamma'_1)_o - z_o\right] \\
s'_2 &= -dz + a'_2\, dx + b'_2\, dy + \left[(\gamma'_2)_o - z_o\right] \\
&\vdots \\
s'_{n'} &= -dz + a'_{n'}\, dx + b'_{n'}\, dy + \left[(\gamma'_{n'})_o - z_o\right]
\end{aligned}
\qquad (7.1.32)
$$

وبادخال الرموز التالية :

$$
\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \\ s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n'} \end{pmatrix}
\qquad
B_{n+n',3} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_n & b_n \\ -1 & a'_1 & b'_1 \\ -1 & a'_2 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & a'_{n'} & b'_{n'} \end{pmatrix}
$$

$$
dX = \begin{pmatrix} dz \\ dx \\ dy \end{pmatrix}
\qquad
\Gamma_o = \begin{pmatrix} (\gamma_1)_o \\ (\gamma_2)_o \\ \vdots \\ (\gamma_n)_o \\ (\gamma'_1)_o - z_o \\ (\gamma'_2)_o - z_o \\ \vdots \\ (\gamma'_{n'})_o - z_o \end{pmatrix}
\qquad (7.1.33)
$$

تكتب جملة المعادلات (7.1.32) على الشكل :

$$\boxed{\Gamma = B\,dX + \Gamma_0} \qquad (7.1.34)$$

والمقدّرين dX و Γ يعطيان بالعلاقتين (7.1.12) و (7.1.13) على ان نعتبر حتط الرموز المبينة في (7.1.33) وان نأخذ شعاع القياسات α في هذه الحالة :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_{n'} \end{pmatrix} \qquad (7.1.35)$$

وصفوفة الاوزان القطرية G

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & g_2 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots g_n & & & \vdots \\ & & & g'_1 & & \\ & & & & g'_2 \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & & g'_{n'} \end{pmatrix} \qquad (7.1.36)$$

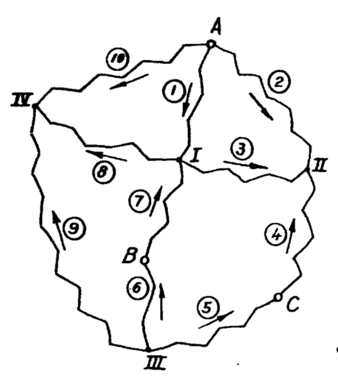
ملاحظة : بما اننا همّلنا اللامتناهيات في الصغر من الدرجة الثانية حينما اشتققنا العلاقة (7.1.4) فيجب بالتقريب المتتالي حساب القيم المعدلة ، الا انه في اغلب الاحيان نكتفي بتقريب واحد وخاصة اذا كانت الاحداثيات التقريبية لـ P_0 محسوبة من تقاطع اتجاهين أو تقويم على ثلاثة اتجاهات نعتبر اوزانا للاتجاهات عادة $\frac{1}{D_i}$ حيث D_i بعد النقطة المرصودة بالكيلومتر واذا كانت $D_i \leq 1^{km}$ فنأخذ الوزن g مساويا للواحد .

(7.2) — تعديل شبكات التسوية :

لنعتبر النقاط A, B, C ذات الارتفاع المعروف (H_A , H_B , H_C) والمعتبر صحيحا ، لنفرض اننا استنادا الى هذه النقاط انشأنا شبكة تسوية (شكل 7.2.1) لتعيين ارتفاع النقاط (I, II, III, IV) فهذه النقاط تدعى بالعقد لان كلا منها ملتقى عدد من المضلعات (الفصل الخامس) • لنسم كل سير محدود بين نقطة معلومة وعقدة أو بين عقدتين مسارا •

لقد اجرينا في هذه الشبكة قياسات التسوية لمختلف المضلعات وحسبنا فروق الارتفاعات بين نقطة وعقدة أو بين عقدتين •

لنرمز للمسارات بـ (1 , 2 , 3 , ...) ولفروق الارتفاعات المقاسة بين ذروتي مسار بـ (h_1' , h_2' , ...) ولنرسم على كل مسار سهما يميز الاتجاه الموجب لكل فرق ارتفاع •



(شكل 7.2.1)

نلاحظ من الشكل (7.2.1) انه لدينا عشر مسارات ، لكنه لتعيين ارتفاعات النقاط (I, II, III, IV) تعيينا وحيدا يلزمنا اربعة مسارات فلدينا اذن قياسات فائضة تمكننا من جهة تحقيق القياسات ومن جهة ثانية تعديلها للحصول على ارتفاعات معدلة للنقاط (I, II, III, IV) وذلك باعتبار كافة القياسات ، ان تعديل

شبكة تسوية يمكن ان يتم اما باعتماد نموذج القياسات الشرطية او نموذج القياسات بالواسطة • وسنشرح هاتين الطريقتين •

١ ـ التعديل بالقياسات الشرطية :

لحساب ارتفاع عقدة نكتفي بمسار واحد فكل مسار اضافي يولد معادلة شرطية • ينتج من هنا انه اذا افترضنا ان n عدد العقد المجهولة في شبكة و t عدد مسارات الشبكة فلدينا :

$$\boxed{n_c = t - n} \qquad (7.2.1)$$

معادلة شرطية يجب تحقيقها للحصول على ارتفاع وحيد لكل عقدة مهما كان المسار المتبع في الحساب وفي حالة الشبكة بالشكل (7.2.1) لدينا

$$n_c = 10 - 4 = 6$$

ستة معادلات شرطية

للرمز بـ ($h_1 , h_2 , ... , h_{10}$) لفروق الارتفاعات الصحيحة النظرية لهذه المسارات لكتابة المعادلات الشرطية نعتبر العقد عقدة تلو عقدة ونلاحظ عدد المسارات الواصلة لها من النقاط المعلومة ومن العقد التي سبق تعيينها فنتبع الطريقة التالية :

أ) يمكن حساب ارتفاع النقطة II مثلا سواء بالمسار 2 اعتبارا من A أو بالمسار 4 اعتبارا من C • فلدينا قياس فائض واحد يولد معادلة شرطية هي :

$$\boxed{H_A + h_2 - h_4 = H_C} \qquad (7.2.2)$$

ب) باعتبار العقدة II قد عينت الان لنعتبر العقدة I • يمكننا حساب ارتفاعها سواء بالمسار 1 أو بالمسار 3 أو بالمسار 7 فلدينا اذن قياسان فائضان يعطيان معادلتين شرطيتين مستقلتين هما :

$$H_A + h_1 - h_7 = H_B \qquad (7.2.3)$$
$$H_A + h_1 + h_3 - h_4 = H_C \qquad (7.2.4)$$

ج) يمكننا ان نفترض ان العقدتين II و I قد عينتا ، فلنعتبر العقدة III يمكننا تعيين ارتفاعها بالمسار 6 أو بالمسار 5 فلدينا اذن معادلة شرطية واحدة هي :

$$H_B - h_6 + h_5 = H_C \qquad (7.2.5)$$

د) نفترض الان ان العقد (III , II , I) قد عينت ، فلتعيين العقدة IV يمكننا حساب ارتفاعها بالمسارات $9, 8, 10$ فلدينا اذن معادلتان شرطيتان :

$$H_A + h_{10} - h_8 - h_1 = H_A \qquad (7.2.6)$$
$$H_A + h_{10} - h_9 + h_6 = H_B \qquad (7.2.7)$$

ان المعادلات (2 . 2 . 7) حتى (7 . 2 . 7) مستقلة وأية معادلة اخرى ستكون غير مستقلة عن هذه المجموعة أي يمكن استنتاجها من المجموعة اعلاه فمثلا اذا كتبنا المعادلة الشرطية : (لاحظ الشكل (7 . 2 . 1

$$H_A + h_1 + h_3 - h_2 = H_A$$

أي

$$h_1 + h_3 - h_2 = 0$$

فيمكننا استنتاجها بطرح (2 . 2 . 7) من (4 . 2 . 7)، وهكذا .....
يمكننا ان نكتب المعادلات (2 . 2 . 7) حتى (7 . 2 . 7) على الشكل :

$$
\begin{aligned}
\cdot + h_2 + \cdot - h_4 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_A - H_C) &= 0 \\
h_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot - h_7 + \cdot + \cdot + \cdot + (H_A - H_B) &= 0 \\
h_1 + \cdot + h_3 - h_4 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_A - H_C) &= 0 \\
\cdot + \cdot + \cdot + \cdot + h_5 - h_6 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + (H_B - H_C) &= 0 \\
h_1 + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot + \cdot - h_8 + \cdot + h_{10} + \quad 0 &= 0 \\
\cdot + \cdot - \cdot + \cdot + \cdot + h_6 + \cdot + \cdot - h_9 + h_{10} + (H_A - H_B) &= 0
\end{aligned}
$$

(7.2.8)

لندخل الرموز التالية :

$$
\underset{(6,10)}{A} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{10} \end{pmatrix} \qquad
L = \begin{pmatrix} H_A - H_C \\ H_A - H_B \\ H_A - H_c \\ H_B - H_C \\ 0 \\ H_A - H_B \end{pmatrix}
$$

(7.2.9)

وتكتب جملة المعادلات (7.2.8) على الشكل :

$$\boxed{A h + L = 0} \qquad (7.2.10)$$

ان h شعاع يمكن قياسه وقياسات مركباته هي $h'_1, h'_2, \ldots\ldots h'_{10}$

لنضع :

$$h' = \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \vdots \\ h'_{10} \end{pmatrix} \qquad (7.2.11)$$

نلاحظ ان النموذج (7.2.10) هو نموذج القياسات الشـــــرطية (6.4.3) وقد سبق ان وجدنا في الفصل السادس (القانــون 6.10.1) القانون الذى يعطينا المقدر $\hat{h}$ وفق مبدأ المربعات الصغرى والذى يحقق جملة المعادلة المتريسية (7.2.10) •

وبادخال المصفوفة القطرية G •

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{10} \end{pmatrix} \qquad (7.2.12)$$

نكتب من (6.10.1) وباستخدام الرموز في هذه المسألة :

$$\boxed{\hat{h} = h' - G^{-1}A^{T}(AG^{-1}A^{T})^{-1}(Ah' + L)} \qquad (7.2.1\ )$$

من هذه العلاقة نحسب فروق الارتفاعات المعدلة (مركبات الشعاع $\hat{h}$) وكما ذكرنا في الفصل السادس ان المقدّر $\hat{h}$ المحسوبة مـن (7.2.13) تم تقديره وفق مبدأ المربعات الصغرى وبشكل تتحقق فيه المعادلة المتريسية (7.2.10) أي :

$$\boxed{A\hat{h} + L = 0} \qquad (7.2.14)$$

لنضع الان :

$$\boxed{W = A h' + L} \qquad (7.2.15)$$

نسمي الشعاع W بشعاع التسكيرات حيث نلاحظ ان الطرف الثاني ليس الا المعادلة (7.2.10) عند تعويض h بالقياس h' ، فعدم تحقيقها هو التسكير •

ويجب ان تكون مركبات الشعاع W صغيرة مفسرة باخطاء القياسات •

بادخال في (7.2.13) (7.2.15) نجد :

$$\boxed{\hat{h} = h' - G^{-1}A^T(AG^{-1}A^T)^{-1} W} \qquad (7.2.16)$$

نعتبر لكل فرق ارتفاع مقاس h_i' وزنا g_i يتناسب عكسا مع طول المسار أى :

$$g_i = \frac{1}{l_i} \qquad (7.2.17)$$

حيث l_i هو طول المسار i وذلك باعتبار ان القياسات قد جرت بنفس الجهاز وضمن نفس الشروط •

اذا كانت اطوال المسارات كلها تقريبا متساوية فنستطيع ان نعتبر أن المصفوفة G هي الاحادية ونجد :

$$\boxed{\hat{h} = h' - A^T(AA^T)^{-1} W} \qquad (7.2.18)$$

بعد حساب $\hat{h}$ يمكننا حساب ارتفاعات العقد باتباع أى مسار نريد • وباعتبار فروقات الارتفاعات المعدلة

٢ — <u>التعديل بالقياسات بالواسطة</u> :

لنحسب لكل عقدة ارتفاعا موقتا وذلك باتباع احد المسارات ، لتكن هذه الارتفاعات $(H_I)_0$, $(H_{II})_0$, $(H_{III})_0$, $(H_{IV})_0$

ولتكن H_I , H_{II} , H_{III} , H_{IV} الارتفاعات النهائية لهذه العقدة فيمكننا ان نكتب

$$
\begin{aligned}
H_{I} &= (H_{I})_0 + x \\
H_{II} &= (H_{II})_0 + y \\
H_{III} &= (H_{III})_0 + z \\
H_{IV} &= (H_{IV})_0 + t
\end{aligned}
\qquad (7.2.18)
$$

حيث x, y, z, t تصحيحات مجهولة •

يمكننا ان نكتب بالنسبة للمسار الاول :

$$(H_{I})_0 + x = H_A + h_1$$

وبالنسبة للمسار الثاني :

$$(H_{II})_0 + y = H_A + h_2$$

وبالنسبة لبقية المسارات الواحد تلو الاخرى :

$$
\begin{aligned}
(H_{II})_0 + y &= (H_{I})_0 + x + h_3 \\
(H_{II})_0 + y &= H_C + h_4 \\
(H_{III})_0 + z &= H_C - h_5 \\
(H_{III})_0 + z &= H_B - h_6 \\
(H_{I})_0 + x &= H_B + h_7 \\
(H_{IV})_0 + t &= (H_{I})_0 + x + h_8 \\
(H_{IV})_0 + t &= (H_{III})_0 + z + h_9 \\
(H_{IV})_0 + t &= H_A + h_{10}
\end{aligned}
$$

فنحصل على المعادلات التالية :

$$
\begin{array}{rcccccccl}
x & + & . & + & . & + & . & = & h_1 + H_A - (H_I)_0 \\
. & + & y & + & . & + & . & = & h_2 + H_A - (H_{II})_0 \\
-x & + & y & + & . & + & . & = & h_3 + (H_I)_0 - (H_{II})_0 \\
. & + & y & + & . & + & . & = & h_4 + H_C - (H_{II})_0 \\
. & + & . & - & z & + & . & = & h_5 - H_C + (H_{III})_0 \\
. & + & . & - & z & + & . & = & h_6 - H_B + (H_{III})_0 \\
x & + & . & + & . & + & . & = & h_7 + H_B - (H_I)_0 \\
-x & + & . & + & . & + & t & = & h_8 + (H_I)_0 - (H_{IV})_0 \\
. & + & . & - & z & + & t & = & h_9 + (H_{III})_0 - (H_{II})_0 \\
. & + & . & + & . & + & t & = & h_{10} + H_A - (H_{IV})_0
\end{array}
\qquad (7.2.19)
$$

لندخل الرموز التالية :

$$
\underset{(10,4)}{B} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}
$$

$$\mathcal{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{10} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} H_A - (H_I)_0 \\ H_A - (H_{II})_0 \\ (H_I)_0 - (H_{II})_0 \\ H_C - (H_{II})_0 \\ (H_{III})_0 - H_C \\ (H_{III})_0 - H_B \\ H_B - (H_I)_0 \\ (H_I)_0 - (H_{IV})_0 \\ (H_{III})_0 - (H_{IV})_0 \\ H_A - (H_{IV})_0 \end{vmatrix}$$

(7 . 2 . 20)

وتكتب المعادلات (7 . 2 . 19) على الشكل :

$$\boxed{B\beta = \mathcal{h} + L} \qquad (7 . 2 . 21)$$

ان الشعاع $\mathcal{h}$ يمكن قياسه وقياسات مركباته هي مركبات الشعاع $\mathcal{h}'$ التي نفرضها مستقلة وذات اوزان معرّفة بالمصفوفة القطرية G، أما الشعاع β فهو مجهول ولا يمكن قياسه • نحن هنا امام نموذج القياسات بالواسطة (3 . 3 . 6) وقد سبق ان وجدنا في الفصل السادس القانون الذى يعطينا المقدر $\hat{\beta}$ والمقدر $\hat{\mathcal{h}}$ وفق مبدأ المربعات الصغرى واللذين يحققان (7 . 2 . 21) • ان القانونين (8 . 10 . 6) و (6 . 10 . 6) مطبقين باعتبار ان الرموز الواردة اعلاه تعطينا :

$$\hat{\beta} = (B^T G B)^{-1} B^T G \; (h' + L) \qquad (7.2.22)$$

$$\hat{h} = B\hat{\beta} - L \qquad (7.2.23)$$

من هذين القانونين نحسب المقدّرين فنستنتج مركبات $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{t} \end{pmatrix} \qquad (7.2.24)$$

وتكون الارتفاع المعدلة للعقد بموجب (7.2.18) بادخال المقدرات :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{I} &= (H_{I})_0 + \hat{x} \\ \hat{H}_{II} &= (H_{II})_0 + \hat{y} \\ \hat{H}_{III} &= (H_{III})_0 + \hat{z} \\ \hat{H}_{IV} &= (H_{IV})_0 + \hat{t} \end{aligned} \qquad (7.2.25)$$

نعتبر هنا ايضا ان الاوزان متناسبة عكسا مع اطوال المسارات أى وفق العلاقة (7.2.17).اذا كانت اطوال المسارات متســـــاوية فعندها يمكننا اعتبار المصفوفة G هي المصفوفة الاحادية وتصبح العلاقة (7.2.22) :

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T \; (h' + L) \qquad (7.2.26)$$

تطبيق : لنعتبر الشبكة المعطاة بالشكل (7.2.2) •
لنفرض ان $h'_1, h'_2, \ldots\ldots h'_7$ فروق الارتفاعات المقاسة H_A، ارتفاع النقطة A احسب الارتفاعات النهائية للعقد •

(شكل 7.2.2)

ملحـــــق

النهايات العظمى والصغرى المرتبطة

(Maximum et minimum liés)

لنعتبر التابع

$$u = f(x, y, z) \qquad (1)$$

حيث متحولات (x, y, z) غير [illegible] تحقق العلاقة :

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

لا يمكننا في هذه الحالة التفتيش عن نهايات التابع u بأن نعدم المشتقات الجزئية للتابع بالنسبة للمتحولات فالقيم التي سنجدهـا سوف لا تحقق بشكل عام المعادلة (2) .

لنفرض اننا نستطيع حل المعادلة (2) بالنسبة لاحـد المتحولات z مثلا فنستنتج من (2)

$$z = \phi(x, y) \qquad (3)$$

وبادخال هذه العلاقة في التابع (1) نجد

$$u = f(x, y, z) = f(x, y, \phi(x, y)) = F(x, y) \qquad (4)$$

نلاحظ هنا اننا قد عبرنا عن u بدلالة متحولين x و y وهذان المتحولان مستقلين (والا لكانت هنالك علاقة ثانية تربط المتحولات) فيمكننا الان ان نطبق الطريقة المعروفة لحساب نهايات التابع u .

اذ نحصل على هذه النهايات بحل جملة المعادلتين :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

فنحصل على : $(x_0 , y_0)_i$ التي تجعل التابع u اعظميا واصغريا ومن اجل كل $(x_0 , y_0)_i$ نحصل من المعادلة (3) على قيمة z_0 المقابلة •

الا ان هذا الحل قد يكون صعبا اما بسبب المعادلة(2) التي قد لا تسمح بايجاد متحول بدلالة المتحولين الاخرين أو بسبب الصعوبة في حل جملة المعادلات (5) •

لهذا سنشرح طريقة ايجاد القيم العظمى والصغرى التابع لعدة متحولات غير مستقلة و هذه الطريقة هي طريقة مضاريب لاكرانج ($Lagrange$) • ولكن قبل التعرض لها لابد من ان نذكر بالملاحظة التالية :

لنعتبر التابع θ لـ n متحول مستقل

$$\theta = \theta(x_1 , x_2 , \dots\dots\dots , x_n) \tag{6}$$

نعلم انه في هذه الحالة نجد النهايات العظمى والصغرى لهذا التابع بأن نعدم كل مشتقاته الجزئية

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \dots\dots\dots , n \tag{7}$$

وبحل جملة هذه المعادلات (7) نحصل على قيم المتحولات التي تجعل التابع اعظميا أو اصغريا •

لنحسب الان التفاضل الكلي للتابع (6) :

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx_2 + \dots\dots\dots + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} dx_n \tag{8}$$

نلاحظ انه في نقاط النهايات نظرا لان المعادلات (7) تكون محققة فيمكننا ان نكتب في النهايات •

$$d\theta = 0 \qquad (9)$$

نستنتج هنا ان التفاضل الكلي لتابع لـ n متحول مستقل يساوى الصفر في نهايات التابع •

وبالعكس اذا كان التفاضل الكلي لتابع لـ n متحول مستقل معدوما فان كافة مشتقاته الجزئية تكون بالضرورة معدومة • بالحقيقة اذا كانت $d\theta = 0$ فتصبح (8) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx_2 + \dots\dots + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad (10)$$

وبما ان المتحولات ($x_1, x_2, \dots, x_n$) مستقلة فان هذه العلاقة لا تتحقق الا اذا كان لدينا :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \dots\dots = \frac{\partial \theta}{\partial x_n} = 0$$

لنفرض الان ان متحولات التابع θ غير مستقلة بل عليها ان تحقق r معادلة ($r < n$) :

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0 \\ \text{-- -- -- -- -- -- --} \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = 0 \end{array} \qquad (11)$$

في هذه الحالة سنبرهن ان الشرط

$$d\theta = 0 \qquad (9)$$

في النهايات هو شرط لازم ، بالحقيقة يمكننا نظريا بحل المعادلات (11) ان نجد r متحولا بدلالة ($n-r$) متحولا ونستطيع اذن ان نعوض ال r متحول بدلالة ال ($n-r$) متحول في التابع (6) فنجد :

$$\theta = \theta(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \Psi(x_{n-r}, x_{n-r+1}, \ldots\ldots, x_n)$$

ان المتحولات $x_{n-r}, x_{n-r+1}, \ldots, x_n$ مستقلة • فحسب الخاصة اعلاه يجب ان يكون لدينا $d\theta = 0$ في نقاط النهايات •

بعد هذه الملاحظة لنبين طريقة مضاريب لاكرانج لايجاد النهايات المرتبطة •

لنعتبر التابع

$$\boxed{u = f(x, y, x)} \qquad (1)$$

حيث متحولاته (x, y, z) مرتبطة بالعلاقة :

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = 0} \qquad (2)$$

لقد بينا اعلاه ان التفاضل الكلي لتابع u يجب ان يعدم في النهايات العظمى والصغرى فيجب ان يكون لدينا :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0} \qquad (12)$$

ولكن هذا لايوجب ان تكون المشتقات الجزئية معدومة لان المتحولات غير مستقلة •

لنحسب الان التفاضل الكلي لـ (2) :

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0} \qquad (13)$$

لنضرب المعادلة (13) بوسيط k مجهول ولنجمعهما بعد ذلك للمعادلة (12) فنجد :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = 0 \qquad (14)$$

ان k ممكن ان تأخذ أية قيمة ، ولنعينها بشكل تتحقق فيه العلاقة :

$$\frac{\partial f}{\partial z} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad (15)$$

وهنا يقتضي ان يكون $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$

تصبح عندئذ المعادلة (14) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy = 0 \qquad (16)$$

بما انه لدينا علاقة بين (x , y , z) هي المعطاة بـ (2) فان لدينا في التابع (1) فقط متحولين مستقلين ونستطيع حتما اعتبار أى متحولين من المتحولات (x , y , z) كمتحولين مستقلين ، فاذا اعتبرنا x , y متحولين مستقلين فان العلاقة (16) لا يمكن ان تتحقق الا اذا كان لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

ان جملة المعادلات (15) ، (2) ، (17) والتي نعيد كتابتها معا :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

تعطينا قيمة لـ k وقيم لـ (x, y, z) في النهايات •

<u>ملاحظات</u> :

١ ــ لقد افترضنا ان $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ فان لم يتحقق ذلك وكان $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$ فنستطيع ان نبدل في النقاش اعلاه z بـ y ونحصل على نفس المعادلات (18) •

٢ ــ نحصل على نفس المعادلات (18) فيما لو اخترنا المتحولين المستقلين (x, z) أو (y, z) •

لنعمم الان هذه الطريقة •

لنعتبر التابع

$$W = f(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) \qquad (19)$$

حيث ان متحولاته مرتبطة بالعلاقات التالية :

$$r < n \qquad \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) &= 0 \\ \\ \varphi_r(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

فاذا كان للتابع W نهايات عظمى وصغرى من اجل قيم لـ $(x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n)$ فيجب ان يتحقق لدينا بالنسبة لهذه القيـــم :

$dW = 0$ أي :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0} \qquad (21)$$

لنأخذ الان التفاضل الكلي للتوابع (20) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
&\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
&\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} dx_n = 0
\end{aligned} \qquad (22)$$

لنضرب المعادلة الاولى من (22) بـ k_1 المعادلة الثانية بـ k_2 .... المعادلة r بـ k_r ولنجمعها مع المعادلة (21) فنجد :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\right) dx_1 \\
+&\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots\ldots\ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}\right) dx_2 \\
+&\text{— — — — — — — — — — —} \\
+&\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots\ldots\ldots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}\right) dx_n = 0
\end{aligned} \qquad (23)$$

لتعين قيم $k_1 , k_2 , \ldots k_r$ بشكل يصبح فيه لديا .

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - - - - \\
\frac{\partial f}{\partial x_r} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} = 0
\end{array}\right\} \quad (24)$$

فلدينا r معادلة بـ r مجهول وسنعتبر ان المعينة الاساسية مغايرة للصفر ، عندئذ تصبح المعادلة (23)

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}}\right) dx_{r+1} \\
+ - - - - - - - - - - - - - - - - \\
+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}\right) dx_n = 0
\end{array} \quad (25)$$

بما انه لدينا r علاقة (20) تربط n متحول فلدينا ($n-r$) متحول مستقل

لنعتبرانها المتحولات ($x_{r+1} , x_{r+2} , \ldots , x_n$) ففي هذه الحالـــة لا تتحقق المعادلة (25) الا اذا كان لدينا :

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}} = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - - - - \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} + k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + k_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots + k_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n} = 0
\end{array}\right\} \quad (26)$$

ولدينا هنا ($n-r$) معادلة .

ان المعادلات (20) و (24) و (26) عددها بالتتابع :

(r) ، (n) ، ($n-r$) أى ($n+r$) معادلة فبحلها نجد

($k_1, k_2, \ldots\ldots, k_r$) والقيم ($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$) المعرفة للنهايات .

تسمى $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_r$ بمضاريب لاكرانج .

<u>قاعدة لتشكيل المعادلات</u>

لدينا التابع

$$W = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \tag{19}$$

ونريد ايجاد نهاياته العظمى والصغرى علما بأن متحولاته غير مستقلة بل يجب ان تحقق r معادلة $r < n$

$$r < n \qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \\ &------------ \\ &\varphi_r(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

لذلك نشكل التابع :

$$\begin{aligned} \Omega = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &+ k_1\,\varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ &+ k_2\,\varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \\ &+ ------------ \\ &+ k_r\,\varphi_r(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \end{aligned} \tag{27}$$

حيث $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_r$ مضاريب لاكرانج .

نشكل الان

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n \tag{28}$$

فنحصل على n معادلة وهي المعادلات (24) و (26) وهذا مايمكن ملاحظته بسهولة •

ثم نشكل :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, r \qquad (29)$$

فنحصل على r معادلة وهي نفس المعادلات (20) :

حالة خاصـــــة :

لنعتبر الحالة الخاصة عند ما يكون التابع ($f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هو شكل تربيعي والتوابع $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ توابع خطية ، أي لنفـــرض اننا نريد ايجاد قيم المتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ التي تجعل التابع :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (30)$$

اعظميا واصغيرا علما بأن المتحولات مرتبطة بالمعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \quad &+ b_{1n} x_n + \ell_1 = 0 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \quad &+ b_{2n} x_n + \ell_2 = 0 \\ &\vdots \\ b_{r1} x_1 + b_{r2} x_2 + \quad &+ b_{rn} x_n + \ell_r = 0 \end{aligned} \qquad (31)$$

حيث ($b_{11}, b_{12}, \ldots\ldots, b_{rn}$) امثال عددية $\ell_1, \ell_2, \ldots\ldots, \ell_r$ ثوابت معطاة •

للوصول الى ذلك نشكل التابع :

$$\begin{aligned} \Omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j &+ 2k_1 (b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \ldots\ldots + b_{1n} x_n + \ell_1) \\ &+ 2k_2 (b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \ldots\ldots + b_{2n} x_n + \ell_1) \\ &------------ \\ &+ 2k_r (b_{r1} x_1 + b_{r2} x_2 + \ldots\ldots + b_{rn} x_n + \ell_r) \end{aligned} \qquad (32)$$

حيث اعتبرنا ($2k_1, 2k_2, \ldots\ldots, 2k_r$) مضاريب لاكرانج •

ولايجاد النهايات نحسب اولا

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial x_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots\ldots, n} \qquad (28)$$

لدينا

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n) + 2k_1 b_{11} + 2k_2 b_{21} + \ldots + 2k_r b_{r1} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n) + 2k_1 b_{12} + 2k_2 b_{22} + \ldots + 2k_r b_{r2} = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = 2(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n) + 2k_1 b_{1n} + 2k_2 b_{2n} + \ldots + 2k_r b_{rn} = 0$$

ويمكننا كتابة هذه المعادلات على الشكل المتريسي التالي :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = (x_1 \; x_2 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + (k_1 \; k_2 \ldots k_r) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = (x_1 \; x_2 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + (k_1 \; k_2 \ldots k_r) \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{pmatrix} = 0$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = (x_1 \; x_2 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} + (k_1 \; k_2 \ldots k_r) \begin{pmatrix} b_{r1} \\ b_{r2} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{pmatrix} = 0$$

وبوضع :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} \qquad (33)$$

تكتب المعادلات السابقة على الشكل :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = X^T \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = X^T \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = X^T \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{r1} \\ b_{r2} \\ \vdots \\ b_{rn} \end{pmatrix} = 0$$

حيث رمزنا بالدليل T لبيان منقول مصفوفة.

ويمكننا الان كتابة المعادلة السابقة على الشكل :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega}{\partial x_n}\end{pmatrix} = X^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{r1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix} \quad (34)$$

لنضع :

$$A_{(n,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B_{(r,n)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{r1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ \vdots & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix} \quad (35)$$

تكتب المعادلة (34) بالشكل

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega}{\partial x_n}\end{pmatrix} = X^T A^T + K^T B = 0$$

لكننا نستطيع دوما اعتبار مصفوفة الشكل التربيعي متناظرة أى : $A = A^T$ فيمكننا كتابة العلاقة السابقة على الشكل

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \Omega}{\partial x_n}\end{pmatrix} = X^T A + K^T B = 0 \quad (36)$$

لنحسب الان

لدينا

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial k_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots\ldots, r} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_1} = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \dots\dots + b_{1n} x_n + l_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_2} = b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \dots\dots + b_{2n} x_n + l_2 = 0 \qquad (37)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k_r} = b_{r1} x_1 + b_{r2} x_2 + \dots\dots + b_{rn} x_n + l_r = 0$$

وباستخدام الرموز (35) و (33) يمكننا ان نكتب هذه الجملة على الشكل :

$$\boxed{BX + L = 0} \qquad (38)$$

حيث

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_r \end{pmatrix} \qquad (39)$$

وكما ذكرنا هنا نحصل على نفس المعادلات الخطية التي تربط المجاهيل أي المجموعة (31)

ان مجموعة المعادلات (36) و (38) تعطينا قيم المتحولات التي تجعل التابع f (30) اصغريا أو اعظميا •

سنعطي فيما يلي طريقة سريعة للحصول على المعادلات (38) و (36) • لنكتب التابع Ω (32) بادخال الرموز المتريسية (33) و (35) و (39) :

$$\Omega = X^T A X + 2 K^T (BX + L) \qquad (40)$$

لنأخذ التفاضل الكلي علما ان المتحولات هي X و K

$$d\Omega = dX^T . A X + X^T A . dX + 2 K^T B . dX + 2 dK^T (BX + L)$$

$$(41)$$

ان Ω عنصر واحد وكذلك $d\Omega$ فينتج ان كل حد من حدود الطرف الثاني من المعادلة (41) هو عنصر (أى مصفوفة لا تحوى الا عنصر او مصفوفة درجتها (1,1)) .

(وهذا مايمكن ان نتثبت منه بسهولة من (41))، فيمكننا ان نعوض أى حد من الطرف الثاني بمقلوبه ، فباعتبار ان المصفوفة A متناظرة ، حيث انها مصفوفة الشكل التربيعي ، نستطيع ان نكتب :

$$dX^T A.X = (dX^T A.X)^T = X^T A.dX$$

وتصبح العلاقة (41)

$$d\Omega = 2X^T A dX + 2K^T B.dX + 2\,dK^T(BX + L)$$

أو

$$d\Omega = 2(X^T A + K^T B)\,dX + 2\,dK^T(BX + L)$$

اننا نحصل على القيم العظمى والصغرى لـ Ω عندما نجعل $d\Omega = 0$ مهما كانت قيم التزايدات dX و dK (أو dK^T)
أى اذا كتبنا

$$(X^T A + K^T B)\,dX + dK^T(BX + L) = 0$$

فيجب ان تتحقق العلاقتان الترييسيتان :

$$\boxed{\begin{aligned} X^T A + K^T B &= 0 \\ BX + L &= 0 \end{aligned}} \qquad (42)$$

وهما نفس المعادلتين (36) و (38) .

الفهـــــــرس

الفصـــل الاول

شـــكل الارض

الفصـــل الثاني

المثلثات الكرويـــة

الفصـــل الثالث

التمثيل المستوى

صفحة

الفصـــل الســادس

تقدير المجاهيل وفق مبدأ المربعات الصغرى

صفحـــة

الفصـــل الســابع

تطبيقات لمبدأ المربعات الصغرى

ملحـــق

توزيـــع
دار القلم العربي بحلب

الطبعة الاولى
١٩٨٠

الرسوم وتصميم الغلاف : هايك طوباليان

[redacted] ٠س